UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

DANIELA MARTINEZ CORREA

VARIEDADES MINIMAIS DE ÁLGEBRAS

Campinas

2018

Daniela Martinez Correa

VARIEDADES MINIMAIS DE ÁLGEBRAS

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestra em Matemática.

Orientador: Lucio Centrone

Este exemplar corresponde à versão final da Dissertação defendida pela aluna Daniela Martinez Correa e orientada pelo Prof. Dr. Lucio Centrone.

Campinas

2018

Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): CAPES

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Márcia Pillon D'Aloia - CRB 8/5180

M366v

Martinez Correa, Daniela, 1992-
Variedades minimais de álgebras / Daniela Martinez Correa. – Campinas, SP : [s.n.], 2018.

Orientador: Lucio Centrone.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. PI-álgebras. 2. Identidade polinomial. 3. Gelfand-Kirillov, Dimensão de. I. Centrone, Lucio, 1983-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Minimal varieties of algebras
Palavras-chave em inglês:
PI-algebras
Polynomial identity
Gelfand-Kirillov dimension
Área de concentração: Matemática
Titulação: Mestra em Matemática
Banca examinadora:
Lucio Centrone [Orientador]
Plamen Emilov Kochloukov
Thiago Castilho de Mello
Data de defesa: 10-08-2018
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Dissertação de Mestrado defendida em 10 de agosto de 2018 e aprovada pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). LUCIO CENTRONE

Prof(a). Dr(a). PLAMEN EMILOV KOCHLOUKOV

Prof(a). Dr(a). THIAGO CASTILHO DE MELLO

As respectivas assinaturas dos membros encontram-se na Ata de defesa

À minha mãe e à minha avó

Agradecimentos

Agradeço a Deus por ser minha força durante estes dois anos. À minha mãe e minha avó por me apoiar e amar em cada etapa de minha vida.

Agradeço ao Professor Lucio Centrone, pela orientação em temas tão interessantes da matemática, por seu tempo, colaboração e confiança durante todo o mestrado.

Agradeço aos professores da banca Plamen Kochloukov e Thiago Castilho pelas valiosas observações que contribuíram no meu trabalho.

Agradeço a meu namorado Carlos Bassani por seu amor e me acompahar durante todo este proceso, pelas palavras de conforto nos momentos difíceis, por fazer de minha estadia no Brasil uma experiência inesquecível.

Aos meus amigos Diana, Ever e Sebastian pelos momentos compartilhados e pelas alegrias vividas no transcurso destes anos.

Também estou profundamente agradecida ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, pela contribuição na minha formação matemática.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Resumo

Neste trabalho estudaremos a caracterização de variedades minimais de álgebras associativas de posto básico finito sobre um corpo de característica zero com PI-expoente maior ou igual que dois, isto é, vamos provar que toda variedade deste tipo é gerada por uma álgebra de matrizes triangulares superiores em blocos. Além disso, estudaremos seus T-ideais e finalmente mostraremos uma relação entre a dimensão de Gelfand-Kirillov e o PI-expoente das álgebras relativamente livres de posto finito de uma variedade não nilpotente. Esta dissertação está baseada no artigo de Antonio Giambruno e Mikhail Zaicev publicado por *Advances in Mathematics* em 2003.

Palavras-chave: PI-álgebra, identidade polinomial, dimensão de Gelfand-Kirillov.

Abstract

In this work we will study a characterization of minimal varieties of algebras of finite basic rank over a field of characteristic zero, that is, we will prove that every such variety is generated by some upper block-triangular matrix algebra. Moreover we will study its T-ideals and finally show a relation between the exponent of a non-nilpotent variety and the Gelfand-Kirillov dimension of the corresponding relatively free algebra of finite rank. This work is based on the paper by Antonio Giambruno and Mikhail Zaicev published in Advances in Mathematics in 2003.

Keywords: PI-algebra, polynomial identity, Gelfand-Kirillov dimension.

Sumário

Introdução

O ramo da matemática no qual esta dissertação se encontra é teoria de aneis, mais especificamente em teoria de álgebras com identidades polinomiais. Um polinômio $f(x_1, \ldots, x_n)$ nas variáveis não comutativas $x_1, \ldots, x_n$ com coeficientes num corpo F, é uma identidade polinomial para uma álgebra A sobre o corpo F, quando f se anula para qualquer substituição de elementos de A nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$. Se existe $f \neq 0$ identidade polinomial para a álgebra A, dizemos que A é uma PI-álgebra.

A primeira vez que este tipo de identidades foram estudadas foi em um artigo de geometria projetiva [7], feito por Dehm em 1922. Logo Wagner em [29] no ano 1937, estuda identidades polinomiais para álgebras de matrizes de tamanho 2×2 e prova a comutatividade de um PI-anel de divisão ordenado. Cabe ressaltar que nestes trabalhos não utilizaram a definição de indentidade polinomial explicitamente. Apenas em 1948 no artigo [20] de Kaplansky foi introduzido este conceito, além disso ele prova que toda PI-álgebra primitiva é uma álgebra simples de dimensão finita, sugerindo uma condição importante de finitude para uma álgebra, o que gerou interesse no estudo das PI-álgebras.

Na atualidade, o estudo desta teoria se encontra bem desenvolvido e em expansão. Além disso existem três linhas de pesquisa em PI-álgebras. A primeira estuda a estrutura de uma álgebra sabendo que ela satisfaz uma identidade polinomial. A segunda linha se caracteriza por estudar as classes de álgebras que satisfazem um dado sistema de identidades polinomiais e a última linha estuda as identidades polinomiais satisfeitas por uma álgebra "interessante". Cabe ressaltar que estas linhas não são isoladas pois a maioria dos problemas em PI-teoria estão interligados, além disso se utilizam ferramentas provenientes de outras áreas da álgebra, da combinatória, da teoria de representações de grupos finitos, entre outras.

Se F é um corpo de característica zero, $F\langle X\rangle$ a álgebra dos polinômios não comutativos nas indeterminadas $x \in X$ e A é uma PI-álgebra sobre F, então as identidades polinomiais de A ficam determinadas pelas identidades multilineares de A. Logo se $\mathrm{Id}(A)$ é o T-ideal de identidades de A, definimos

$$c_n(A) = \dim P_n/(P_n \cap \mathrm{Id}(A)),$$

onde P_n é o subespaço dos polinômios multilineares nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$. Assim $\{c_n(A)\}_{n\geq 1}$ é uma sequência de inteiros positivos que medem a "taxa" de crescimento das identidades polinomiais de A.

Em 1972 Regev prova que se A é uma PI-álgebra não nilpotente então

$$1 \leq c_n(A) \leq a^n$$

para alguma constante a. Logo, na década de 1980 o matemático israelense Shimshom Amitsur, fez uma conjectura sobre o comportamento assintótico das codimensões de uma PI-álgebra. Esta conjecuta diz que o limite

$$\exp(A) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(A)}$$

existe e é um inteiro. A prova para álgebras associativas foi feita no ano 1999 por Antonio Giambruno e Mikhail Zaicev em [13] e [14].

Se $\mathcal{V}$ é uma variedade gerada por uma álgebra A, isto é, $\mathrm{Id}(\mathcal{V}) = \mathrm{Id}(A)$. Definimos $\exp(\mathcal{V}) = \exp(A)$. Como $\exp(A)$ existe e é inteiro quando A é associativa, o próximo objetivo é estudar variedades geradas por álgebras associativas de dimensão finita tendo um expoente fixo. Em nosso caso vamos estudar variedades minimais com expoente fixo maior ou igual a dois.

O trabalho contém quatro capítulos, os primeiros três nos fornecem ferramentas para estudar os resultados de Giambruno e Zaicev em [15]. No primeiro capítulo vamos estudar as primeiras definições, exemplos e resultados de PI-álgebras. No segundo capítulo reuniremos alguns resultados importantes sobre representações do grupo simétrico com o objetivo de aplicar nos polinômios multilineares, pois veremos este subespaço como um módulo deste grupo. Além disso, definiremos o cocaracter de uma PI-álgebra e falaremos de maneira rápida sobre séries de Hilbert. No capítulo três introduziremos o conceito de codimensão, falaremos de forma breve de álgebras graduadas e alguns resultados de Kemer, os quais são alicerces da teoria estrutural de PI-álgebras. Finalmente definiremos expoente de uma PI-álgebra e estudaremos alguns resultados sobre dimensão de Gelfand-Kirillov de uma álgebra.

O capítulo final é a parte mais importante deste trabalho, pois corresponde ao estudo do artigo *Minimal Varieties of Algebras of Exponential Growth* de Antonio Giambruno e Mikhail Zaicev publicado por *Advances in Mathematics* em 2003. Este capítulo se divide em três seções, na primeira estudaremos a caracterização de variedades minimais de álgebras associativas de posto básico finito sobre um corpo de característica zero com PI-expoente maior ou igual que dois, isto é, vamos provar que toda variedade deste tipo é gerada por uma álgebra de matrizes triangulares superiores por blocos e na segunda seção estudaremos seus T-ideais. Finalmente na terceira seção mostraremos uma relação entre a dimensão de Gelfand-Kirillov e o PI-expoente das álgebras relativamente livres de posto finito de uma variedade de álgebras associativas não nilpotente.

1 Preliminares

Neste capítulo introduziremos os conceitos básicos para desenvolver este trabalho. Assumiremos que o leitor esteja familiarizado com os conceitos básicos de grupos, anéis e módulos. Estudaremos as primeiras definições, exemplos e resultados de $PI-$álgebras. A referência principal neste capítulo será [16].

1.1 Álgebras

Nesta seção falaremos de forma breve sobre álgebras e enunciaremos alguns resultados conhecidos de teoria de aneis que nos sevirão de ferramentas nos próximos capítulos.

Definição 1.1.1. Sejam F um corpo e A um espaço vetorial sobre F. A é uma álgebra se é dotada de uma operação $\star$, chamada multiplicação, tal que para todo $a, b, c \in A$ e $\alpha \in F$ tem-se:

- $(a + b) \star c = a \star c + b \star c$
- $c \star (a + b) = c \star a + c \star b$
- $\alpha(a \star b) = \alpha a \star b = a \star \alpha b.$

Exemplo 1.1.2. Seja F um corpo e K uma extensão de F, logo K é uma álgebra sobre F, onde a estrutura de F-espaço e a multiplicação em K são as naturais.

Exemplo 1.1.3. Seja F um corpo, considere $M_n(F)$, o conjunto de matrizes de tamanho $n \times n$ com entrada em F, logo $M_n(F)$ com a multiplicação usual de matrizes é uma álgebra.

Exemplo 1.1.4. Considere $F[x_1, \dots, x_n]$ como o anel dos polinômios comutativos nas indeterminadas $x_1, \dots, x_n$ sobre o corpo F, logo $F[x_1, \dots, x_n]$ é uma álgebra com a multiplicação usual de polinômios.

Definição 1.1.5. Seja A uma álgebra sobre F, dizemos que:

- A é associativa se $a \star b \star c = (a \star b) \star c = a \star (b \star c)$
- A é comutativa se $a \star b = b \star a$
- A é unitária se existe $e \in A$ tal que $e \star a = a \star e = a$ para todo $a \in A$
- A é nilpotente se existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $A^n = \underbrace{A \star \cdots \star A}_{n-\text{vezes}} = 0$

Cabe ressaltar que em nosso trabalho sempre consideraremos álgebras associativas a menos de menção explícita.

Exemplo 1.1.6. $M_n(F)$ com a multiplicação usual de matrizes é uma algebra associativa, comutativa e unitaria.

Exemplo 1.1.7. Considere F corpo e $sl_n(F) = \{A \in M_n(k) | Tr(A) = 0\}$ com a operação $[r_1, r_2] = r_1 r_2 - r_2 r_1$, onde $r_1, r_2 \in sl_n(F)$. Logo $sl_n(F)$ é uma álgebra não unitária, nem associativa.

Exemplo 1.1.8. Sejam $X \neq \emptyset$ e F um corpo, logo o conjunto dos polinômios não comutativos nas indeterminadas $x \in X$, $F\langle X \rangle$ é uma álgebra associativa sobre F.

Note que uma base linear de $F\langle X \rangle$ consiste de todas as palavras no alfabeto X, incluindo a palavra vazia. Tais palavras são chamadas monômios e o produto de dois monômios é a justaposição.

Definição 1.1.9. Um subespaço vetorial S de uma álgebra A é uma subálgebra se é fechado com respeito à multiplicação de A.

Definição 1.1.10. Sejam A uma álgebra e $I \subseteq A$ fechado pela soma de A. I é chamado ideal à direita de A se $I \star A \subseteq I$. Analogamente definimos ideal à esquerda de A se $A \star I \subseteq I$. Além disso, I é dito ideal bilateral se é ideal à esquerda e direita.

Considere uma álgebra A e $I \subseteq A$ ideal. Definamos a seguinte relação de equivalência: $a \sim b$ se e somente se $a - b \in I$. Logo o quociente A/I tem estrutura de álgebra com a operação $[a] \tilde{\star} [b] = [a \star b]$.

Definição 1.1.11. Uma função linear entre álgebras $\phi : A_1 \longrightarrow A_2$ é chamada homomorfismo de álgebras se

$$\phi(a \star b) = \phi(a) \star \phi(b).$$

Quando não houver ambiguidade diremos apenas que ϕ é um homomorfismo.

Teorema 1.1.12. *Seja $\phi : A_1 \longrightarrow A_2$ um homomorfismo de álgebras. O núcleo de ϕ*

$$ker(\phi) = \{a \in A_1 | \phi(a) = 0\}$$

é um ideal. Além disso, $A_1/ker(\phi) \cong Im(\phi)$.

Definição 1.1.13. Seja A uma $F-$álgebra e $\delta : A \rightarrow A$ uma função linear. δ é dita derivação se $\delta(a \star b) = \delta(a) \star b + a \star \delta(b)$.

Exemplo 1.1.14. Sejam V e W duas álgebras sobre um corpo F com bases $\{v_i : i \in I\}$ e $\{w_j : j \in J\}$ respectivamente. Lembremos que uma função $\phi : V \times W \rightarrow F$ tem suporte finito se o conjunto

$$\{(v, w) \in V \times W | \phi(v, w) \neq 0\}$$

é finito. Consideremos o seguinte conjunto de funções

$$M = \{\phi : V \times W \to F |\ \phi \text{ tem suporte finito}\}.$$

Segue que M é um espaço vetorial sobre F. Note que $\{\delta_{(v,w)}\}_{(v,w)\in V\times W}$ onde

$$\delta_{(v,w)}(v', w') = \begin{cases} 1 & se \quad (v', w') = (v, w) \\ \\ 0 & se \quad (v', w') \neq (v, w) \end{cases}$$

é uma base para M. Vamos identificar $\delta_{(v,w)}$ com (v, w) e considerar M_0 o subespaço vetorial gerado por todos os vetores de M da forma

$$(v, w+w')-(v, w)-(v, w'), (v+v', w)-(v, w)-(v', w), \alpha(v, w)-(\alpha v, w), \alpha(v, w)-(v, \alpha w)$$

Assim M/M_0 é um espaço vetorial chamado o produto tensorial de V e W, denotado por $V \otimes W$ e denotaremos os elementos deste espaço quociente como

$$v \otimes w := (v, w) + M_0.$$

Dessa forma $\{v_i \otimes w_j : i \in I, j \in J\}$ é base de $V \otimes W$, logo dados $v \in V$ e $w \in W$, temos que

$$v \otimes w = (\sum_{i\in I} a_i v_i) \otimes (\sum_{j\in j} b_j w_j) = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} a_i b_j (v_i \otimes w_j).$$

Além disso, se definimos $(v_1 \otimes w_1)\tilde{\star}(v_2 \otimes w_2) = v_1 \star_V v_2 \otimes w_1 \star_W w_2$, então o produto tensorial $V \otimes W$ com a operação $\tilde{\star}$ é uma álgebra sobre F.

O seguinte teorema fala da propriedade universal do produto tensorial de espaços vetoriais.

Teorema 1.1.15. *Sejam V e W espaços vetoriais sobre um corpo F.*

1) A projeção $\pi : V \times W \to V \otimes W \to W$ é multilinear.

2) Sejam M um espaço vetorial sobre F e $\varphi : V \times W \to M$ uma função multilinear. Então existe uma única função linear $\phi : V \otimes W \to M$ tal que

$$\phi \circ \pi = \varphi.$$

Exemplo 1.1.16. Considere $M_k(F)$ a álgebra de matrizes de tamanho $k \times k$ sobre o corpo F e seja $F[{\xi_{ij}}^{(t)}]$ a álgebra dos polinômios comutativos nas variáveis ${\xi_{ij}}^{(t)}$ com $t \geq 1$ e $1 \leq i, j \leq k$. Note que $M_k(F) \otimes_F F[{\xi_{ij}}^{(t)}] \cong M_k(F[{\xi_{ij}}^{(t)}])$. De fato, consideremos $\mathcal{B} = \{e_{ij}; 1 \leq i, j \leq k\}$ a base canônica de $M_k(F)$ e

$$\varphi : M_k(F) \times_F F[{\xi_{ij}}^{(t)}] \to M_k(F[{\xi_{ij}}^{(t)}])$$

dada por $\varphi(e_{ij}, \xi_{lm}^{(t)}) = \xi_{lm}^{(t)} e_{ij}$, logo estendemos φ ao resto de elementos de $M_k(F) \times_F F[\xi_{ij}{}^{(t)}]$ de tal forma que φ seja bilinear. Assim pela propriedade do produto tensorial existe $\phi : M_k(F) \otimes_F F[\xi_{ij}{}^{(t)}] \to M_k(F[\xi_{ij}{}^{(t)}])$ função linear tal que

$$\phi \circ \pi = \varphi,$$

onde $\pi : M_k(F) \times_F F[\xi_{ij}{}^{(t)}] \to M_k(F) \otimes_F F[\xi_{ij}{}^{(t)}]$ é a projeção canônica. Note que ϕ leva bases em bases, logo é um isomorfismo. Alem disso é um homomorfismo pela forma que foi construído e daí ϕ é um isomoformismo de álgebras.

Exemplo 1.1.17. Sejam G um grupo finito e F um corpo, considere o seguinte conjunto

$$FG = \left\{ \sum_{g \in G} \alpha_g g | \alpha_g \in F \right\}$$

com as operações

a) $\displaystyle\sum_{g\in G} \alpha_g g + \sum_{g\in G} \beta_g g = \sum_{g\in G} (\alpha_g + \beta_g) g$

b) $\displaystyle\lambda \left(\sum_{g\in G} \alpha_g g \right) = \sum_{g\in G} (\lambda \alpha_g) g$

Assim FG é um espaço vetorial sobre F. Além disso tem estrutura de álgebra com a seguinte multiplicação

$$\sum_{g\in G} \alpha_g g \cdot \sum_{h\in G} \beta_h h = \sum_{g,h\in G} (\alpha_g \beta_h) gh.$$

FG é chamada a álgebra de grupo de G sobre F.

Definição 1.1.18. Dada uma classe de álgebras $\mathcal{C}$ e $A \in \mathcal{C}$ uma álgebra gerada por um conjunto X, dizemos que A é um álgebra livre em $\mathcal{C}$ se toda função $X \to B$, onde $B \in \mathcal{C}$, pode ser estendida a um único homomorfismo de álgebras $A \to B$. A cardinalidade de X é chamado o posto de A.

Proposição 1.1.19. *A álgebra dos polinômios não comutativos nas indeterminadas $x \in X$, $F\langle X \rangle$, é a álgebra livre em X (a menos de isomorfismos) na classe das álgebras associativas e unitarias.*

Demonstração. Seja D uma $F-$álgebra associativa e $\sigma : X \to D$ uma função. Defina $\tilde{\sigma} : F\langle X \rangle \to D$ dada por

$$\tilde{\sigma}(x_{i_1} \dots x_{i_k}) = \sigma(x_{i_1})\sigma(x_{i_2}) \dots \sigma(x_{i_k}).$$

Se $h_{ik} = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}$, temos que

$$\tilde{\sigma}(\sum_{ik} \alpha_{ik} h_{ik}) = \sum_{ik} \alpha_{ik} \tilde{\sigma}(h_{ik}).$$

É claro que $\tilde{\sigma}$ é um homomorfismo de álgebras que estende σ. Agora suponhamos que existe outro homomorfismo álgebras $\gamma : F\langle X\rangle \to D$ que é extensão de σ, então

$$\gamma(x_{i_1}\dots x_{i_k}) = \gamma(x_{i_1})\gamma(x_{i_2})\dots\gamma(x_{i_k}) = \sigma(x_{i_1})\sigma(x_{i_2})\dots\sigma(x_{i_k}) = \tilde{\sigma}(x_{i_1}\dots x_{i_k}).$$

Logo

$$\gamma(\sum_{ik}\alpha_{ik}h_{ik}) = \sum_{ik}\alpha_{ik}(h_{ik}) = \sum_{ik}\alpha_{ik}\tilde{\sigma}(h_{ik}) = \tilde{\sigma}(\sum_{ik}\alpha_{ik}h_{ik}),$$

de onde segue que $\gamma = \tilde{\sigma}$. Portanto $F\langle X\rangle$ é álgebra livre em X. $\square$

Observação 1.1.20. Em nosso caso $F\langle X\rangle$ tem posto enumerável. Se $f \in F\langle X\rangle$, escreveremos $f = f(x_1, \cdots, x_n)$ para indicar que $x_1, \cdots, x_n \in X$ são as únicas indeterminadas aparecendo em f.

Definimos o grau de um monômio u, $\deg u$, como o comprimento da palavra u. Também o grau de u na indeterminada x_i, $\deg_{x_i} u$, como o número de vezes que aparece x_i em u. Logo o grau de um polinômio $f = f(x_1, \cdots, x_n)$, $\deg f$, é o maior grau dos monômios em f e $\deg_{x_i} f$ como o máximo de $\deg_{x_i} u$, para os monômios em f.

Definição 1.1.21. Seja A uma álgebra sobre um corpo F. Seu radical de Jacobson, $J(A)$, é a interseção de todos os ideais de A à direita que são maximais e regulares. Além disso, A é dita semissimples se $J(A) = 0$ e é dito simples se $A^2 \neq 0$ e A não tem ideais próprios não trivais.

Exemplo 1.1.22. $M_2(F)$ é simples. Em geral $M_n(F)$ é uma álgebra simples.

Agora, vamos enunciar alguns resultados bem conhecidos, que relacionam algebras simples com semissimples, as provas destes podem ser encontradas em [18] e [10].

a) Se A é uma álgebra então $J(A/J(A)) = 0$.

b) Toda álgebra semissimples é uma soma direta de álgebras simples.

c) $A/J(A)$ é soma direta de álgebras simples.

d) Se A é uma F-álgebra simples de dimensão finita e F é um corpo qualquer então $A \cong M_n(D)$, onde D é um anel de divisão.

e) Toda álgebra simples de dimensão finita sobre um corpo F algebricamente fechado é isomorfa a uma álgebra de matrizes sobre o mesmo corpo.

Enunciaremos um resultado da teoria de anéis que nos permite estudar a estrutura de algumas álgebras. Este resultado nos servirá no futuro como ferramenta para calcular o expoente de crescimento de uma PI-álgebra, sua demostração pode ser encontrada em [16].

Teorema 1.1.23 (Wedderburn-Malcev)**.** *Seja A uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo F com* $\operatorname{char} F = 0$ *e seja $J(A)$ o radical de Jacobson de A. Então existe uma subálgebra maximal semissimples B tal que $A = B + J(A)$.*

Cabe ressaltar que a decomposição de A como soma de B com $J(A)$ é soma de espaços vetoriais.

1.2 Identidades Polinomiais

Nesta seção vamos introduzir os conceitos de identidade polinomial e PI-álgebra. Alem disso daremos alguns exemplos. Da aqui para frente estaremos considerarando sempre álgebras associativas.

Definição 1.2.1. Seja A uma F-álgebra e $f = f(x_1, \cdots, x_n) \in F\langle X\rangle$. Dizemos que $f \equiv 0$ é uma identidade polinomial de A se $f(a_1, \cdots, a_n) = 0$ para todo $a_1, \cdots, a_n \in A$.

Observação 1.2.2. Se Φ denota o conjunto de todos os homomorfismos de álgebras $\varphi : F\langle X\rangle \mapsto A$, então $f \equiv 0$ é uma identidade de A se e somente se $f \in \bigcap\limits_{\varphi\in\Phi} \ker\varphi$.

Note que o polinômio $f = 0$ é uma identidade polinomial para toda F-álgebra, a qual é chamada identidade trivial. Assim temos a seguinte definição:

Definição 1.2.3. Uma F-álgebra é uma PI-álgebra se satisfaz uma identidade polinomial $f \equiv 0$ não trivial.

Exemplo 1.2.4. Para $a, b \in A$, seja $[a, b] = ab - ba$ o comutador de Lie de a e b. Logo, se A é uma álgebra comutativa, então $[x, y] \equiv 0$ é uma identidade polinomial de A. Portanto A é uma PI-álgebra.

Exemplo 1.2.5. Seja $UT_n(F)$ a álgebra de matrizes triangulares superiores de tamanho $n \times n$ sobre o corpo F. Então $U_n(F)$ é uma PI-álgebra pois satisfaz a identidade

$$[x_1, x_2] \cdots [x_{2n-1}, x_{2n}] \equiv 0.$$

De fato, sejam $A, B \in UT_n(F)$ então AB e BA são matrizes triangulares superiores e têm a mesma diagonal superior. Logo $AB - BA$ é uma matriz triangular estritamente superior. Além disso, o espaço das matrizes triangualres estritamente superiores, $SUT_n(F)$, é um ideal bilateral nilpotente tal que $SUT_n(F)^n = 0$ e daí

$$[x_1, x_2] \cdots [x_{2n-1}, x_{2n}] \equiv 0$$

é uma identidade de $UT_n(F)$.

Exemplo 1.2.6. Se A é nilpotente, então é uma PI-álgebra. De fato, $A^n = 0$ para algum $n \geq 1$, logo $x_1 \cdots x_n \equiv 0$ é uma identidade polinomial para A.

Exemplo 1.2.7. A álgebra $M_2(F)$ satisfaz a identidade $[[x, y]^2, z] \equiv 0$.

De fato, considere $A, B \in M_2(F)$. Seja $C = [A, B]$ então $\operatorname{tr} C = 0$ pois $\operatorname{tr}(AB - BA) = 0$. Assim podemos escrever $C = \begin{pmatrix} d & m \\ n & -d \end{pmatrix}$ com $d, m, n \in F$. Logo, o polinômio característico é dado por

$$p(\lambda) = (d - \lambda)(-d - \lambda) - mn = \lambda^2 + (-d^2 - mn) = \lambda^2 + \det C.$$

Pelo Teorema de Hamilton–Cayley temos que $p(C) = 0$, logo $C^2 + (\det C)I = 0$, como consequência C^2 é uma matriz escalar, assim C^2 comuta com qualquer matriz de $M_2(F)$. Portanto $[[A, B]^2, D] = 0$ para toda $D \in M_2(F)$.

1.3 T-ideais e Variedades de Álgebras

Anteriormente vimos a definição de identidades polinomiais e PI-álgebras, agora estudaremos a estrutura que tem o conjunto das identidades polinomias de uma álgebra, assim introduziremos os conceitos de $T-$ideais e variedade de álgebras, também estudaremos a correspodência biunívoca que existe entre eles.

Definição 1.3.1. Um ideal I de $F\langle X\rangle$ é um $T-$*ideal* se $\varphi(I) \subseteq I$ para todo endomorfismo φ de $F\langle X\rangle$.

Exemplo 1.3.2. Dada uma álgebra A associativa sobre o corpo F, definamos

$$\mathrm{Id}(A) = \{f \in F\langle X\rangle | f \equiv 0 \text{ em A}\}$$

o conjunto das identidades polinomiais de A. Temos que $\mathrm{Id}(A)$ é um ideal bilateral de $F\langle X\rangle$. Além disso um endomorfismo $\varphi : F\langle X\rangle \to F\langle X\rangle$ é da forma $x \mapsto g(x)$, logo $f(g_1, \ldots, g_n) \in \mathrm{Id}(A)$ para todo $f \in \mathrm{Id}(A)$. Portanto $\mathrm{Id}(A)$ é um $T-$ideal.

Observação 1.3.3. Todo $T-$ideal de $F\langle X\rangle$ é o conjunto das identidades polinomiais de uma álgebra A. De fato, seja I um $T-$ideal e considere $f \in F\langle X\rangle$ tal que $f \equiv 0$ em $F\langle X\rangle/I$, logo

$$f(g_1, \ldots g_n) + I = f(g_1 + I, \ldots, g_n + I) = I,$$

assim $f(g_1, \ldots g_n) \in I$ para quaisquer $g_1, \ldots, g_n \in F\langle X\rangle$. Se $g_i = x_i$, para $i = 1, \ldots, n$, temos que $Id(F\langle X\rangle)/I) \subseteq I$. Agora consideremos $f \in I$, então $f(g_1, \ldots g_n) \in I$ para todo $g_1, \ldots, g_n \in F\langle X\rangle$ já que I é um $T-$ideal. Logo

$$I = f(g_1, \ldots, g_n) + I = f(g_1 + I, \ldots, g_n + I),$$

ou seja, $f \equiv 0$ em $F\langle X\rangle/I$. Portanto $\mathrm{Id}(F\langle X\rangle)/I) = I$.

Definição 1.3.4. Seja $S \subseteq F\langle X\rangle$ não vazio. A classe de todas as álgebras associativas A tais que $f \equiv 0$ em A para todo $f \in S$ é chamada variedade gerada por S e será denotada por $\mathcal{V} = \mathcal{V}(S)$. Uma variedade deste tipo é dita não trivial se $S \neq \{0\}$.

Note que se $\mathcal{V}$ é uma variedade determinada pelo conjunto S e $\langle S\rangle_T$ é o $T-$ideal gerado por S, então $\mathcal{V}(S) = \mathcal{V}(\langle S\rangle_T)$. Além disso, $\langle S\rangle_T = \mathrm{Id}(F\langle X\rangle/\langle S\rangle_T)$ logo $\langle S\rangle_T = \cap_{A\in\mathcal{V}} \mathrm{Id}(A)$. Pelo anterior dizemos que $\langle S\rangle_T = \mathrm{Id}(\mathcal{V}(S))$.

Se $\mathcal{V}$ é uma variedade e A é uma F-álgebra tal que $\mathrm{Id}(A) = \mathrm{Id}(\mathcal{V})$, dizemos que a variedade $\mathcal{V}$ é gerada por A e escrevemos $\mathcal{V} = \mathrm{var}(A)$.

Exemplo 1.3.5. Note que uma álgebra A é comutativa se, e somente se, $[a, b] = ab-ba = 0$ para todo $a, b \in A$. Assim se $S = \{[x, y]\}$ temos que $\mathcal{V}(S)$ é a classe de todas as álgebras comutativas.

Exemplo 1.3.6. Dizemos que uma algebra A é nil de indice limitado, se existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n = 0$ para qualquer $a \in A$. Logo se $S = \{x^n\}$ então $\mathcal{V}(S)$ é a classe de todas as álgebras nil com indice limitado n.

Exemplo 1.3.7. Seja $S = \{[x_1, x_2] \cdots [x_{2n-1}, x_{2n}]\}$, pelo Exemplo 1.2.5 temos que $UT_n(F) \in \mathcal{V}(S)$. Mas em [26] foi provado que

$$\mathrm{Id}(UT_n(F)) = \langle S\rangle_T,$$

assim $\mathcal{V}(S) = \mathcal{V}(UT_n(F))$.

Definição 1.3.8. Seja S um conjunto de polinômios em $F\langle X\rangle$ e $f \in F\langle X\rangle$. Dizemos que f é uma consequência dos polinômios de S se $f \in \langle S\rangle_T$.

Definição 1.3.9. Dizemos que dois conjuntos de polinômios são equivalentes se eles geram o mesmo T-ideal.

Definição 1.3.10. Sejam $\mathcal{V}$ uma variedade, $A \in \mathcal{V}$ uma álgebra e $Y \subseteq A$ um subconjunto de A. Dizemos que A é relativamente livre sobre Y (com respeito a $\mathcal{V}$) se, para cada álgebra $B \in \mathcal{V}$ e cada função $\alpha : Y \to B$, existe um único homomorfismo $\beta : A \to B$ estendendo α. A cardinalidade de Y é chamada de posto de A.

Teorema 1.3.11. *Sejam X um conjunto não vazio, $F\langle X\rangle$ uma álgebra livre sobre X e $\mathcal{V}$ uma variedade com T-ideal $\mathrm{Id}(\mathcal{V})$. Então, $F\langle X\rangle/\mathrm{Id}(\mathcal{V})$ é uma álgebra relativamente livre sobre o conjunto $\overline{X} = \{x + \mathrm{Id}(\mathcal{V}) | x \in X\}$. Além disso, quaisquer duas álgebras relativamente livres com respeito a $\mathcal{V}$ de mesmo posto são isomorfas*

Demonstração. Sejam $B \in \mathcal{V}$ e considere uma função $\alpha : \overline{X} \mapsto B$ uma função. Definamos $\beta : X \mapsto B$ como $\beta(x) = \alpha(x + \mathrm{Id}(\mathcal{V}))$. Como $F\langle X\rangle$ é livre sobre X, então β pode ser estendida a um homomorfismo $\overline{\beta} : F\langle X\rangle \mapsto B$. Isto mostra que $\mathrm{Id}(\mathcal{V}) \subseteq \ker(\overline{\beta})$, pois se $f \in \mathrm{Id}(\mathcal{V})$, temos que $\overline{\beta}f = f(\overline{\beta}(x_1), \ldots, \overline{\beta}(x_n)) = 0$. Portanto α pode ser estendida a um homomorfismo $\overline{\alpha} : F\langle X\rangle / \mathrm{Id}(\mathcal{V}) \mapsto B$ dado por $\overline{\alpha}(f + \mathrm{Id}(\mathcal{V})) = \overline{\beta}(f)$. Note que $\overline{\alpha}$ está bem definido pois se $f + \mathrm{Id}(\mathcal{V}) = h + \mathrm{Id}(\mathcal{V})$, então $f - h \in \mathrm{Id}(\mathcal{V})$. Assim $0 = \overline{\beta}(f - h) = \overline{\beta}(f) - \overline{\beta}(h)$ e portanto $\overline{\alpha}(f + \mathrm{Id}(\mathcal{V})) = \overline{\alpha}(h + \mathrm{Id}(\mathcal{V}))$. Seja $\alpha' : F\langle X\rangle / \mathrm{Id}(\mathcal{V}) \mapsto B$ outro homomorfismo que estende α, então podemos definir outro homomorfismo de extensão de β para $F\langle X\rangle$, dado por $\beta'(f) = \alpha'(f + \mathrm{Id}(\mathcal{V}))$. Mas $F\langle X\rangle$ é livre sobre X, logo $\overline{\beta} = \beta'$. Assim

$$\alpha'(f + \mathrm{Id}(\mathcal{V}) = \beta'(f) = \overline{\beta}(f) = \overline{\alpha}(f + \mathrm{Id}(\mathcal{V})).$$

Portanto $\overline{\alpha}$ é único, logo $F\langle X\rangle / \mathrm{Id}(\mathcal{V})$ é relativamente livre sobre $\overline{X}$.

Agora consideremos F_1 e F_2 duas álgebras relativamente livres que tem o mesmo posto sobre $X = \{x_i | i \in I\}$ e $Y = \{y_i | i \in I\}$, respectivamente, com relação a $\mathcal{V}$. Sejam $\varphi_1 : X \mapsto F_1$ e $\varphi_2 : X \mapsto F_2$ funções dadas por $\varphi_1(x_i) = y_i$ e $\varphi_2(y_i) = x_i$. Logo existem $\alpha_1 : F_1 \mapsto F_2$ e $\alpha_2 : F_2 \mapsto F_1$ homomorfimos únicos que estendem φ_1 e φ_2, repectivamente. Como $\alpha_2\alpha_1$ e $\alpha_1\alpha_2$ são as funções identidades sobre X e Y, temos que α_1 é isomorfismo. □

Teorema 1.3.12. *Existe uma correpondência biunívoca entre os T-ideais de $F\langle X\rangle$ e variedades de álgebras.*

Demonstração. Sejam I_1 e I_2 T-ideais tais que $I_1 \neq I_2$. Como $I_1 \neq I_2$ existe $f \in I_1/I_2$, assim $\mathcal{V}(I_1) \neq \mathcal{V}(I_2)$ pois $F\langle X\rangle/I_2$ não satisfaz f e $F\langle X\rangle/I_2 \in \mathcal{V}(I_2)$.

Agora se $\mathcal{V}_1$ e $\mathcal{V}_2$ são duas variedades distintas, existe $A \in \mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2$, portanto existe $f \in \mathrm{Id}(\mathcal{V}_2)$ tal que $f \notin \mathrm{Id}(A)$. Além disso $\mathrm{Id}(\mathcal{V}_1) \subseteq \mathrm{Id}(A)$, assim $\mathrm{Id}(\mathcal{V}_1) \neq \mathrm{Id}(\mathcal{V}_2)$. □

1.4 Polinômios Homogêneos e Multilineares

Dada uma PI-álgebra uma das perguntas mais frequentes é a descrição de suas identidades. Nesta seção provaremos que quando o corpo F tem característica zero, o estudo das identidades de uma F-álgebra é reduzido ao estudo de identidades multilineares.

Seja $F_n = F\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ a álgebra livre de posto $n \geq 1$. Esta álgebra pode ser decomposta como

$$F_n = {F_n}^{(1)} \oplus {F_n}^{(2)} \oplus \cdots$$

onde, para cada k, ${F_n}^{(k)}$ é o subespaço gerado por todos os monômios de grau total k. Dado que ${F_n}^{(i)}{F_n}^{(j)} \subseteq {F_n}^{(i+j)}$ para todo i, j, dizemos que F_n tem estrutura de álgebra graduada. Os subespaços ${F_n}^{(k)}$ são chamados componentes homogêneas de F_n. Além disso, podemos escrever

$${F_n}^{(k)} = \bigoplus_{i_1+\cdots+i_n=k} {F_n}^{(i_1,\ldots,i_n)}$$

onde ${F_n}^{(i_1,\ldots,i_n)}$ é o subespaço gerado por todos os monômios de grau i_j em x_j. Como ${F_n}^{(i_1,\ldots,i_n)}{F_n}^{(j_1,\ldots,j_n)} \subseteq {F_n}^{(i_1+j_1,\ldots,i_n+j_n)}$, dizemos que ${F_n}^{(k)}$ é multigraduada. A decomposição anterior é válida se X é enumerável.

Definição 1.4.1. Um polinômio $f \in {F_n}^{(k)}$ para algum $k \geq 1$, é chamado polinômio homogêneo de grau k. Se $f \in {F_n}^{(i_1,\ldots,i_n)}$ é chamado multi-homogêneo de multigrau $(i_1, \ldots, i_n)$. Dizemos que f é homogêneo na variável x_i se x_i aparece com mesmo grau em todo monômio de f.

Observação 1.4.2. Seja F um corpo. Então, se $f(x_1, \ldots, x_n) \in F\langle X\rangle$ podemos escrever

$$f = \sum_{i_1\geq 0,\ldots,i_n\geq 0} f^{(i_1,\ldots,i_n)}$$

onde $f^{(i_1,\ldots,i_n)} \in {F_n}^{(i_1,\ldots,i_n)}$ é a soma de todos os monômios em f onde $x_1, \ldots, x_n$ aparecem com grau $i_1, \ldots, i_n$ respectivamente. Os polinômios $f^{(i_1,\ldots,i_n)}$ são chamados componentes multi-homogêneas de f. Note que a soma de acima é finita.

Teorema 1.4.3. *Seja F um corpo infinito. Se $f \equiv 0$ é uma identidade polinomial para uma álgebra A, então cada componente multi-homogênea de f é uma identidade polinomial para A.*

Demonstração. Seja $f(x_1, \ldots, x_n) \in F\langle X\rangle$. Para cada x_t, $1 \leq t \leq n$, temos $f = \sum_{i=0}^{m} f_i$ com $m = \deg_{x_t} f$, onde f_i é a soma de todos os monômios de f de grau i em x_t.

Note que para provar o teorema, basta mostrar que para cada x_t, $f_i \equiv 0$ em A para todo $0 \leq i \leq \deg_{x_t} f$. Pois se esta afirmação é válida, podemos decompor f_i para x'_t em soma $\sum_{j=0}^{m'} f_{ij}$ de monômios de grau j em x'_t, onde $m = \deg_{x'_t} f_i$ como fizemos com f. Dessa forma, cada f_{ij} fixa o grau em duas variáveis que també́n seriam identidades polinomiais em A. Repetindo o argumento até que as componentes da decomposição sejam multi-homogêneas, mostramos o teorema.

Sejam $\alpha_0, \ldots, \alpha_m$ elementos distintos de F. É claro que $f(x_1, \ldots, \alpha_j x_t, \ldots, x_n) = 0$ em A para cada $j = 0, \ldots, m$. Como cada f_i é homogênea em x_t,

$$f(x_1, \ldots, \alpha_j x_t, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^{m} {\alpha_j}^i f_i(x_1, \ldots, x_n)$$

para todo $j = 0, \ldots, m$. Agora considere o seguinte sistema

$$\begin{pmatrix} f_0(\alpha_0 x_1, \ldots, x_n) \\ f_1(\alpha_1 x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(\alpha_m x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ {\alpha_0}^m & {\alpha_1}^m & \ldots & {\alpha_m}^m \end{pmatrix}}_{\Delta} \begin{pmatrix} f_0(x_1, \ldots, x_n) \\ f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix}$$

Dados quaisquer $a_1, \ldots, a_n \in A$ e escrevendo $f_i(a_1, \ldots, a_n) = \overline{f}_i$, temos que

$$(\overline{f}_0, \ldots, \overline{f}_m)\Delta = 0.$$

Note Δ é a matriz de Vandermonde, assim o determinante $\det(\Delta) = \prod\limits_{0 \leq i < j \leq m} (\alpha_j - \alpha_i)$ é não nulo, logo $\overline{f}_j = 0$ e daí $f_j \equiv 0$ são identidades de A para $1 \leq j \leq m$. □

Observação 1.4.4. Note que o resultado anterior é válido se F é finito e $|F| > \deg f$, pois de novo $\det(\Delta) \neq 0$.

Exemplo 1.4.5. Seja F um corpo de q elementos. Logo se $k \in F$, temos $k^q = k$. Assim $f(x) = x^q - x$ é identidade polinomial de F, mas as componentes homogêneas x^q e x não se anulam em F.

Definição 1.4.6. Um polinômio f é linear na variável x_i se x_i aparece com grau 1 em cada monômio de f. Um polinômio que é linear em cada uma de suas variáveis é dito multilinear.

Dado um polinômio multilinear, podemos escrever

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(n)}$$

onde $\alpha_\sigma \in F$ e S_n é o grupo simétrico sobre $\{1, \ldots, n\}$. Note que se $f(x_1, \ldots, x_n)$ é linear na variável x_1, então

$$f(\sum \alpha_i y_i, x_2, \ldots, x_n) = \sum \alpha_i f(y_i, x_2, \ldots, x_n)$$

para cada $\alpha_i \in F$,$y_i \in F\langle X \rangle$.

Lema 1.4.7. *Seja A uma F-álgebra gerada como espaço vetorial por um conjunto B sobre F. Se um polinômio multilinear f se anula em B, então $f \equiv 0$ em A.*

Demonstração. Sejam $a_1, \ldots, a_n \in A$. Como A é gerado por B sobre F podemos escrever $a_1 = \sum \alpha_{1i} u_i, \ldots, a_n = \sum \alpha_{ni} u_i$, onde $\alpha_{ij} \in F$ e u_i são elementos de B. Assim, se $f(x_1, \ldots, x_n)$ é multilinear e se anula em B, temos que

$$f(a_1, \ldots, a_n) = \sum \alpha_{1i_i} \ldots \alpha_{ni_n} f(u_{i_1}, \ldots, u_{i_n}) = 0.$$

□

Agora vamos mostrar como reduzir uma identidade polinomial em um polinômio multilinear, usando um processo chamado multilinearização.

Teorema 1.4.8. *Se uma álgebra A satisfaz uma identidade polinomial de grau k, então também satisfaz uma identidade multilinear de grau menor ou igual a k.*

Demonstração. Seja $f(x_1, \dots, x_n) \in F\langle X\rangle$ uma identidade polinomial de A. Se todas as variáveis aparecem com grau menor ou igual a 1, então obtemos uma identidade multilinear escrevendo $x_i = 0$ para algumas das variáveis que aparecem com grau zero em algum monômio de f. Por exemplo, se apenas x_1 tem grau zero em algum dos monômios de f, então $g(x_2, \dots, x_n) = f(0, x_2 \dots, x_n)$ é a identidade multilinear desejada.

Assim, podemos assumir que uma das variáveis de f tem grau maior que 1. Sendo $d_1, \dots, d_n$ os graus das variáveis $x_1, \dots, x_n$ respectivamente, e $d = \max\{d_1, \dots, d_n\}$, temos que $d > 1$. Ainda, sem perda de generalidade, podemos assumir que existe $t \leq n$ tal que $d = d_1 = \cdots = d_t$ e $d_i < d$ para todo $t < i \leq n$.
Agora, defina um polinômio com uma variável adicional $h = h(y_1, y_2, x_2, \dots, x_n)$ da forma

$$h := f(y_1 + y_2, x_2, \dots, x_n) - f(y_1, x_2, \dots, x_n) - f(y_2, x_2, \dots, x_n).$$

Temos que h também é identidade polinomial de A. Note que podemos escrever o polinômio f como soma de monômios

$$f = \sum_i \lambda_i w_i,$$

onde os w_i são palavras de f duas a duas distintos e $0 \neq \lambda_i \in F$. Da mesma forma, podemos escrever $h = \sum\limits_i \lambda_i h_i$, onde cada h_i é obtido de w_i da mesma forma que h é obtido de f. Observemos que se x_1 não aparece em w_i então $h_i = -w_i$. Se x_1 aperece apenas uma vez em w_i, ou seja, w_i é linear na variável x_1, então $h_i = 0$. Por fim, se x_1 aparece pelo menos duas vezes em w_i então h_i é a soma de todas as palavras obtidas substituindo pelo menos um, mas não todos, x_1 em w_i por x_2. Além disso, temos que essas palavras são diferentes das palavras de $h_{i'}$ para qualquer $i' \neq i$. Como $d > 1$, obtemos que $h \neq 0$.

Assim h é um polinômio não nulo tal que $h \equiv 0$ em A. Note que, em h os monômios de grau d em y_1 e em y_2 de $f(y_1 + y_2, x_2, \dots, x_n)$ se cancelam com os monômios de grau d em y_1 de $f(y_1, x_2, \dots, x_n)$ e de y_2 em $f(y_2, x_2, \dots, x_n)$. Portanto, o grau de x_1 e x_2 em g é $d - 1$.

Repetindo o argumento até o grau de x_1 ser 1 e usando o mesmo processo para todas as variáveis com grau maior que 1, obtemos uma identidade polinomial multilinear não nula em A que possui grau menor do que o grau de f. $\square$

Teorema 1.4.9. *Se* $\operatorname{char} F = 0$, *então cada polinômio não nulo* $f \in F\langle X\rangle$ *é equivalente a um conjunto finito de polinômios multilineares.*

Demonstração. Dado que $\operatorname{char} F = 0$, logo F é um corpo infinito. Assim pelo Teorema 1.4.3, temos que f é equivalente ao conjunto de suas componentes multi-homogêneas. Desse modo, podemos assumir que $f = f(x_1, \dots, x_n)$ é multi-homogêneo.

Se o grau de f em x_1 é $d > 1$, vamos usar o método de multilinearização descrito anteriormente no Teorema 1.4.8. Logo temos que

$$f(y_1 + y_2, x_2, \ldots, x_n) = h(y_1, y_2, x_2, \ldots, x_n) + f(y_1, x_2, \ldots, x_n) + f(y_2, x_2, \ldots, x_n).$$

Como f é multi-homogêneo, temos que $f(y_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $f(y_2, x_2, \ldots, x_n)$ são polinômios multi-homogêneos com grau d em y_1 e y_2,respectivamente. Assim, podemos escrever

$$f(y_1 + y_2, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^{d} g_i(y_1, y_2, x_2, \ldots, x_n)$$

onde para cada $i = 0, \ldots, d$, g_i é a componente homogênea de $f(y_1 + y_2, x_2, \ldots, x_n)$ com grau i em y_1 e $d - i$ em y_2. Notemos que $g_0(y_1, y_2, x_2, \ldots, x_n) = f(y_2, x_2, \ldots, x_n)$ e $g_d(y_1, y_2, x_2, \ldots, x_n) = f(y_1, x_2, \ldots, x_n)$.

De novo pelo Teorema 1.4.3, temos que cada g_i é consequência de f, para cada $i = 0, \ldots, d$. Além disso, temos que para cada i

$$g_i(y_1, y_2, x_2, \ldots, x_n) = \binom{d}{i} f(y_1, x_2, \ldots, x_n).$$

E como $\operatorname{char} F = 0$, temos que $\binom{d}{i} \neq 0$ para todo $i = 1, \ldots, d - 1$, ou seja que f é uma consequência de cada g_i, com $i = 1, \ldots, d - 1$, que possuem graus em y_1 e y_2 menores do que d. Continuando com o processo de multilinearização, obtemos um conjunto finito de polinômios multilineares equivalentes a f. □

Observação 1.4.10. O teorema anterior também é válido se $\operatorname{char} F > \deg f$.

Corolário 1.4.11. *Se* $\operatorname{char} F = 0$*, todo* T*-ideal de* $F\langle X \rangle$ *é gerado, como* T*-ideal, pelos polinômios multilineares contidos nele.*

1.5 Identidades Estáveis e Elementos Genéricos

Nesta seção estudaremos as identidades da álgebra $A \otimes_F C$ quando C é uma álgebra comutativa e F um corpo infinito. Além disso provaremos que $A \otimes_F C$ satisfaz as mesmas identidades que A.

Definição 1.5.1. Seja f uma identidade para uma F-álgebra A. Dizemos que f é uma identidade estável para A se para toda álgebra comutativa C temos que f é uma identidade de $A \otimes_F C$.

Lema 1.5.2. *Se* F *é um corpo infinito e* A *é uma* F*-álgebra, então cada identidade polinomial de* A *é estável.*

Demonstração. Seja $f(x_1, \ldots, x_n)$ uma identidade polinomial de A. Considere C uma álgebra comutativa sobre F e $\overline{A} = A \otimes_F C$. Note que pelo Teorema 1.4.3 podemos assumir que f é multi-homogêneo de multigrau $(m_1, \ldots, m_n)$.

Para $\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n \in \overline{A}$ precisamos provar que $f(\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n) = 0$. Suponhamos primeiro que $\overline{a}_1 = a_1 \otimes c_1, \ldots, \overline{a}_n = a_n \otimes c_n$. Logo

$$f(\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n) = f(a_1, \ldots, a_n) \otimes c_1^{m_1} \ldots c_n^{m_n} = 0.$$

Agora se $\overline{a}_1 = b_1 \otimes d_1 + b_2 \otimes d_2, \overline{a}_2 = a_2 \otimes c_2, \ldots, \overline{a}_n = a_n \otimes c_n$. Logo

$$\begin{aligned} f(\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n) &= f(b_1 \otimes d_1, a_2 \otimes c_2, \ldots, a_n \otimes c_n) + f(b_2 \otimes d_2, a_2 \otimes c_2, \ldots, a_n \otimes c_n) \\ &+ \sum_{i=1}^{m_1-1} f_i(b_1 \otimes d_1, b_2 \otimes d_2, a_2 \otimes c_2, \ldots, a_n \otimes c_n) \end{aligned}$$

onde

$$\sum_{i=1}^{m_1-1} f_i(x_1 + y_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1 + y_1, x_2, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(y_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{1.1}$$

e $\deg_{x_1} f_i = i$. Dado que todos os polinômios f_i em 1.1 são multi-homogêneos e consequências de f, pela primeira parte da prova segue que $f(\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n) = 0$ também neste caso.

Generalizando o argumento anterior para $\overline{a}_1 = \sum a_{1i} \otimes c_{1i}, \ldots, \overline{a}_n = \sum a_{ni} \otimes c_{ni}$ arbitrários, escrevemos $f(\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n)$ como uma soma de expressões da forma

$$\overline{g} = g(a_{i_1 j_1} \otimes c_{i_1 j_1}, \ldots, a_{i_k j_k} \otimes c_{i_k j_k})$$

onde $g(x_1, \ldots, x_k)$ é multi-homogêneo e consequência de f. De novo pela primeira parte temos que $\overline{g} = 0$. $\square$

Como uma aplicação do teorema anterior, vamos encontrar uma forma explícita para a álgebra relativamente livre de uma variedade gerada por uma álgebra de dimensão finita. Mas primeiro vamos introduzir o conceito de elementos genéricos.

Seja A uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo infinito F e $\dim_F A = m$. Considere $\{u_1, \ldots, u_m\}$ uma base de A sobre F e ${\xi_j}^{(i)}$, $i \geq 1$, $1 \leq j \leq m$, indeterminadas comutativas. Logo $F[{\xi_j}^{(i)} | i \geq 1, 1 \leq j \leq m]$ é o anel dos polinômios sobre F nessas indeterminadas.

Definição 1.5.3. Seja $B = A \otimes F[{\xi_j}^{(i)}]$. Os elementos

$$\xi^{(i)} = \sum_{j=1}^{m} u_j \otimes {\xi_j}^{(i)}$$

para $i \geq 1$ são chamados elementos génericos e a subálgebra $\tilde{A}$ gerada por eles sobre F é chamada álgebra genérica dos elementos de A.

Teorema 1.5.4. *Se F é um corpo infinito, $\tilde{A}$ é uma álgebra relativamente livre de posto enumerável da variedade* $\operatorname{var}(A)$*, isto é,* $\tilde{A} \cong F\langle X\rangle / \operatorname{Id}(A)$ *onde X é enumerável.*

Demonstração. Seja $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ enumerável e considere $\psi : F\langle X\rangle \to \tilde{A}$ o homomorfismo induzido pela função $x_i \mapsto \xi^i$ para $i \geq 1$. Vamos provar que $\ker \psi = \operatorname{Id}(A)$. Pelo Lema 1.5.2 temos que $\operatorname{Id}(A) \subseteq \ker \psi$, agora suponhamos que $g = g(x_1, \ldots, x_n) \in \ker \psi$, isto é, $g(\xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(n)}) = 0$ em $\tilde{A}$ e sejam $a_1, \ldots, a_n$ elementos arbitrários de A. Escrevemos cada a_i como uma combinação linear da base $\{u_1, \ldots, u_m\}$ de A, logo

$$a_i = \sum_{j=1}^{m} {\lambda_j}^{(i)} u_j$$

com ${\lambda_1}^{(i)}, \ldots, {\lambda_m}^{(i)} \in F$. Como $F[{\xi_j}^{(i)}]$ é álgebra livre associativa e comutativa de posto enumeŕavel, temos que a função ${\xi_j}^{(i)} \mapsto {\lambda_j}^{(i)}$ se estende a um único homomorfismo $F[{\xi_j}^{(i)}] \mapsto F$. Além disso, pela propriedade universal do produto tensorial temos que a função

$$a \mapsto a, a \in A, {\xi_j}^{(i)} \mapsto {\lambda_j}^{(i)}, 1 \leq i \leq n, ,1 \leq j \leq m,$$

se estende a um único homomorfismo $\varphi : A \otimes F[{\xi_j}^{(i)}]$ tal que $\varphi(\xi^{(i)}) = a_i$, $1 \leq i \leq n$. Portanto

$$0 = \varphi(g(\xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(n)})) = g(\varphi(\xi^{(1)}), \ldots, \varphi(\xi^{(n)})) = 0.$$

Como $a_1, \ldots, a_n$ são elementos arbitrários de A, temos que $g(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0$ é uma identidade de A. □

Observação 1.5.5. Um caso particular do teorema anterior é quando $A = M_k(F)$. Escolhamos como base de A as matrizes canônicas e_{ij}. Consideremos também $F[{\xi_{ij}}^{(t)}]$ nas variáveis ${\xi_{ij}}^{(t)}$ com $t \geq 1$ e $1 \leq i, j \leq k$. Pelo Exemplo 1.1.16 temos que $M_k(F) \otimes_F F[{\xi_{ij}}^{(t)}] \cong M_k(F[{\xi_{ij}}^{(t)}])$ e

$$\xi^t = \sum_{i,j=1}^{k} {\xi_{ij}}^{(t)} e_{ij}$$

é a matriz com entradas ${\xi_{ij}}^{(t)}$. Os elementos ξ^t são chamados matrizes genéricas de tamanho $k \times k$ e a álgebra $F\{\xi\} = F\{\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots\}$ é chamada álgebra das matrizes genéricas de tamanho $k \times k$ sobre F.

Do Teorema 1.5.4 e da observação anterior segue o seguinte resultado

Corolário 1.5.6. *A álgebra $F\{\xi\}$ das matrizes genéricas de tamanho $k \otimes k$ sobre o corpo infinito F é a álgebra relativamente livre de posto enumerável da variedade gerada por $M_k(F)$.*

1.6 Identidades de Álgebras de Matrizes

As álgebras de dimensão finita, em particular as álgebras de matrizes são exemplos importantes na PI-teoria, até o momento só provamos que $M_2(F)$ é uma PI-álgebra, agora vamos demostrar que $M_n(F)$ também é PI-álgebra para todo n, pois nesta seção definiremos alguns polinômios que são identidades de álgebras de dimensão finita, em particular, de álgebras de matrizes.

Definição 1.6.1. Seja $f = f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_t)$ um polinômio linear em cada uma das variáveis $x_1, \ldots, x_n$. Dizemos que f é alternado nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$ se, para qualquer $1 \leq i < j \leq n$, o polinômio é zero quando trocamos x_i por x_j.

Pela linearidade temos que se f é alternado nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$, logo para $1 \leq i < j \leq n$ temos

$$f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_t) = -f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_t).$$

A propriedade anterior é equivalente à definição de polinômio alternado, se char $F \neq 2$. Ainda mais, como toda permutação $\sigma \in S_n$ é produto de transposições, temos que $f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_t)$ é alternado em $x_1, \ldots, x_n$, se e somente se

$$f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}, y_1, \ldots, y_t) = (\operatorname{sgn} \sigma) f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_t).$$

Proposição 1.6.2. *Seja $f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_t)$ um polinômio alternado em $x_1, \ldots, x_n$ e A uma F-álgebra. Se $a_1, \ldots, a_n \in A$ são linearmente dependentes sobre F, então $f(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_t) = 0$ para todo $b_1, \ldots, b_t \in A$.*

Demonstração. Pela hipótese podemos supor que $a_1 = \sum_{i=2}^{n} \alpha_i a_i$ com $\alpha_i \in F$. Portanto

$$f(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_t) = \sum_{i=2}^{n} \alpha_i f(a_i, a_2, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_t) = 0$$

pois f é alternado e em cada termo $f(a_i, a_2, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_t)$ dois argumentos coincidem. □

Definição 1.6.3. O polinômio alternado

$$\mathrm{Cap}_m(x_1, \ldots, x_m; y_1, \ldots y_{m+1}) = \sum_{\sigma \in S_m} \mathrm{sgn}(\sigma) y_1 x_{\sigma(1)} y_2 x_{\sigma(2)} \cdots y_m x_{\sigma(m)} y_{m+1}$$

é chamado o $m-$ésimo polinômio de Capelli.

Para álgebras com unidade, temos a seguinte definição:

Definição 1.6.4. Uma álgebra A satisfaz o m-ésimo polinômio de Capelli, se A satisfaz todos os polinômios obtidos de

$$\mathrm{Cap}_m(x_1, \ldots, x_m; y_1, \ldots y_{m+1})$$

colocando eventualmente y_i igual a 1 em todas as formas possíveis.

Definição 1.6.5. O polinômio

$$\mathrm{St}_m(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{\sigma \in S_m} \mathrm{sgn}(\sigma) x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(m)}$$

é chamado polinômio standard de grau m.

Proposição 1.6.6. *Seja A uma F-álgebra de dimensão finita, então A satisfaz o $(n+1)-$ésimo polinômio de Capelli onde $n = \dim_F A$*

Demonstração. Dado que Cap_{n+1} é multilinear temos que é suficiente provar que o polinômio se anula na base de A. Como A tem dimensão n e Cap_{n+1} é alternado em $n+1$ elementos, pela proposição 1.6.2, Cap_{n+1} é zero na base. □

Lembremos que $M_k(F)$ é uma álgebra de dimensão finita, logo satisfaz uma identidade de Capelli de grau $k^2 + 1$, o Teorema de Amitsur-Levitzki nos diz que esta álgebra de matrizes satisfaz uma identidade standard de grau menor . Uma prova deste resultado está em [16]. A prova original foi publicada em 1950 e pode ser encontrada em [3], utiliza indução e propriedades de combinatória das matrizes.

Teorema 1.6.7 (Amitsur-Levitzki)**.** *A álgebra $M_k(F)$ satisfaz a identidade standard*

$$\mathrm{St}_{2k} \equiv 0$$

e não satisfaz identidades de grau menor que $2k$.

1.7 Teorema de Lewin

Sejam A e B duas F-álgebras com T-ideais $\mathrm{Id}(A)$ e $\mathrm{Id}(B)$, respectivamente. O produto $\mathrm{Id}(A)\,\mathrm{Id}(B)$ é um $T-$ideal, mas em geral é um problema construir uma álgebra C tal que $\mathrm{Id}(C) = \mathrm{Id}(A)\,\mathrm{Id}(B)$. Uma solução para este problema foi dada por Lewin e nesta seção estudaremos tal resultado. Além disso, este teorema é uma ferramenta fundamental para o estudo do artigo principal desta dissertação.

Dado que a prova do Teorema de Lewin utiliza ferramentas de módulos, bimódulo e módulos livres, lembremos algumas destas definições.

Definição 1.7.1. Seja R um anel com unidade e M um grupo abeliano e suponhamos que existe uma operacão externa $R \times M \to M$ (multiplicação por escalar) denotada como $(r, m) \mapsto rm$ que satisfaz:

- $r(m + m') = rm + rm'$
- $(r + r')m = rm + r'm$
- $(rr')m = r(r'm)$
- $1m = m$

Então M munida com esta operação é chamado $R-$módulo à esquerda.

Observação 1.7.2. De forma análoga se define $R-$módulo à direita, só que desta vez existe uma ação à direita de R sobre M. Se R é comutativo então M é um $R-$módulo à esquerda e direita.

Exemplo 1.7.3. Todo espaço vetorial sobre um corpo F é um $F-$módulo.

Exemplo 1.7.4. Todo grupo abeliano é um $\mathbb{Z}-$módulo.

Definição 1.7.5. Seja M um módulo, um submódulo M' de M é um subgrupo fechado pela multiplicação por escalar.

Definição 1.7.6. Um $R-$módulo à esquerda M é livre se é soma direita de cópias de R, isto é,

$$M = \bigoplus_{i \in I} Ra_i$$

onde $Ra_i \cong R$. O conjunto $\{a_i | i \in I\}$ é chamado base de M.

Agora vamos enunciar um teorema que fala da propriedade universal dos módulos livres. A demostração deste teorema pode ser encontrada em [27].

Teorema 1.7.7. *Seja $X = \{a_i | i \in I\}$ uma base do módulo livre M. Dado um módulo B e $f : X \to B$ função então existe um único homomorfismo de $R-$módulos $\tilde{f} : A \to B$ que estende f.*

Definição 1.7.8. Sejam R, S dois anéis e M um grupo abeliano. M é dito (R, S)-bimódulo, se é um $R-$módulo à esquerda e um $S-$módulo à direita tal que $r(ms) = (mr)s$ para todo $r \in R$, $m \in M$ e $s \in S$.

Para $F\langle X\rangle$, a álgebra livre associativa de posto enumerável, denotemos por R o $(F\langle X\rangle, F\langle X\rangle)$-bimódulo livre com geradores contáveis $r_1, r_2, \ldots$. Logo existe uma única função linear $\delta : F\langle X\rangle \to R$ tal que

$$\delta(x_i) = r_i \text{ para } i \geq 1 \text{ e } \delta(fg) = \delta(f)g + f\delta(g)$$

para todo $f, g \in F\langle X\rangle$. Claramente δ está definida sobre os monômios e é estendida pela linearidade em $F\langle X\rangle$. Agora, consideremos a seguinte função linear $\psi : F\langle X\rangle \to \begin{pmatrix} F\langle X\rangle & R \\ 0 & F\langle X\rangle \end{pmatrix}$ dada por

$$\psi(f) = \begin{pmatrix} f & \delta(f) \\ 0 & f \end{pmatrix}.$$

Note que ψ é um homomorfismo de álgebras pois δ é uma derivação. Sejam U, V dois ideais de $F\langle X\rangle$, logo o quociente $R/(UR + RV)$ tem estrutura de $(F\langle X\rangle/U, F\langle X\rangle/V)$-bimódulo livre com base

$$\{r_i + (UR + RV), i = 1, 2\ldots\}.$$

Sejam π_U e π_V os homomorfismos canônicos de $F\langle X\rangle$ sobre $F\langle X\rangle/U$ e $F\langle X\rangle/V$ respectivamente, lembremos que estes estão dados por $\pi_U(f) = f + U$ e $\pi_V(f) = f + V$. Definamos $\overline{\delta} : F\langle X\rangle \to R/(UR + RV)$ dada por $\overline{\delta}(f) = \delta(f) + (UR + RV)$. Note que

$$\begin{aligned} \overline{\delta}(fg) &= \overline{\delta}(fg) + (UR + RV) \\ &= \overline{\delta}(f)g + f\overline{\delta}(g)UR + RV \\ &= (\delta(f) + UR + VR)g + f(\delta(g) + UR + VR) \\ &= \overline{\delta}(f)g + f\overline{\delta}(g). \end{aligned}$$

Assim $\overline{\delta}$ é uma derivação. Portanto a função $\overline{\psi} : F\langle X\rangle \to \begin{pmatrix} F\langle X\rangle/U & R/(UR + RV) \\ 0 & F\langle X\rangle/V \end{pmatrix}$ dada por $\overline{\psi}(f) = \begin{pmatrix} \pi_U(f) & \overline{\delta}(f) \\ 0 & \pi_V(f) \end{pmatrix}$ é um homomorfismo de álgebras.

Agora vamos enunciar o Teorema de Lewin, sua demonstração pode ser encontrada em [25] e [16].

Teorema 1.7.9 (Teorema de Lewin)**.** *Com as notações acima a função $\overline{\psi}$ é um homomorfismo de álgebras e* $\ker \overline{\psi} = UV$.

Corolário 1.7.10. *Sejam A, B duas F-álgebras e M um (A, B)-bimódulo. Suponhamos que*

1) *A contém uma subálgebra relativamente livre $\tilde{A}$ com geradores $a_1, a_2, \ldots$ e $U = \mathrm{Id}(\tilde{A})$ é o T-ideal de identidades de $\tilde{A}$.*

2) *B contém uma subálgebra relativamente livre $\tilde{B}$ com geradores $b_1, b_2, \ldots$ e $V = \mathrm{Id}(\tilde{B})$ é o T-ideal de identidades de $\tilde{B}$.*

3) M contém um $(\tilde{A}, \tilde{B})$-bimódulo livre com geradores $w_1, w_2, \dots$.

Então os elementos $\begin{pmatrix} a_i & w_i \\ 0 & b_i \end{pmatrix}$, *$i = 1, 2, \dots$, são geradores de uma subálgebra relativamente livre $\tilde{C}$ da álgebra* $\begin{pmatrix} A & M \\ 0 & B \end{pmatrix}$ *e* $\mathrm{Id}(\tilde{C}) = UV$.

Demonstração. Sejam $\tilde{A} \cong F\langle X\rangle/U$, $\tilde{B} \cong F\langle X\rangle/V$ e $W = \langle w_1, w_2, \dots\rangle$. Os isomorfismos anteriores estão dados pelas funções $x_i + U \mapsto a_i$, $x_i + V \mapsto b_i$ respectivamente para $i = 1, 2, \dots$.

Como R é $(F\langle X\rangle, F\langle X\rangle)$-bimódulo livre com geradores $r_1, r_2, \dots$, logo a função $r_i + (UR + RV) \mapsto w_i$ define um isomorfismo de bimódulos entre $R/(UR + RV)$ e $\tilde{A}W\tilde{B}$. Portanto temos um isomorfismo de álgebras

$$\eta : \begin{pmatrix} F\langle X\rangle/U & R/(UR + RV) \\ 0 & F\langle X\rangle/V \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \tilde{A} & \tilde{A}W\tilde{B} \\ 0 & \tilde{B} \end{pmatrix} \subseteq \begin{pmatrix} A & M \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

tal que $\eta\left(\begin{pmatrix} x_i + U & r_i \\ 0 & x_i + V \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a_i & w_i \\ 0 & b_i \end{pmatrix} = a_i + w_i + b_i$. É claro que $\ker \eta = 0$.

Agora seja

$$\overline{\psi} : F\langle X\rangle \to \begin{pmatrix} F\langle X\rangle/U & R/(UR + RV) \\ 0 & F\langle X\rangle/V \end{pmatrix}$$

como no Teorema 1.7.9 e considere $\overline{\varphi} = \eta\overline{\psi}$. Então, pelo teorema anterior $\mathrm{Im}\,\overline{\varphi}$ é uma F-álgebra gerada pelos elementos

$$\begin{pmatrix} a_i & w_i \\ 0 & b_i \end{pmatrix}, i = 1, 2, \dots$$

e $\mathrm{Im}\,\overline{\varphi} \cong F\langle X\rangle/\ker\overline{\varphi} = F\langle X\rangle/U$. $\square$

2 Representações do Grupo Simétrico

Neste capítulo vamos reunir os resultados básicos da teoria de representações de grupos finitos, em particular estudaremos as representações do grupo simétrico e suas relações com partições de inteiros com o objetivo de aplicar estes conceitos em polinômios multilineares. Como referência principal teremos [16] e [28].

2.1 Representações de Dimensão Finita

Se V é um espaço vetorial sobre o corpo F, vamos denotar por $GL(V)$ o grupo dos automorfismos de V e por $\mathrm{End}(V)$ a álgebra dos F-endomorfismos de V.

Definição 2.1.1. Uma representação de um grupo G em um espaço vetorial V de dimensão finita é um homomorfismo de grupos $\rho : G \to GL(V)$.

Seja FG a álgebra de grupo de G sobre F (Exemplo 1.1.17) e considere uma representação ρ de G sobre V, essa representação induz um homomorfismo de álgebras $\rho' : FG \to \mathrm{End}(V)$ dado por

$$\rho'\left(\sum_{g\in G} \alpha_g g\right) = \sum_{g\in G} \alpha_g \rho(g)$$

tal que $\rho'(1) = 1$.

Se V é um espaço vetorial de dimensão finita, definimos o grau de ρ como $\dim V$. Além disso, cada representação de G determina unicamente um FG-módulo de dimensão finita. De fato, seja $\rho : G \to GL(V)$ uma representação de G sobre V, então V é um FG-módulo à esquerda com a operação

$$g \cdot v = \rho(g)v$$

para $g \in G$ e $v \in V$. Por outro lado, se M é um FG-módulo à esquerda e é um espaço vetorial de dimensão finita sobre F, podemos definir a representação $\rho : G \to GL(V)$ como

$$\rho(g)(m) = g \cdot m$$

para $g \in G$ e $m \in M$.

Definição 2.1.2. Seja G um grupo e $\rho : G \to \mathrm{End}(FG)$ homomorfismo tal que $\rho(g) = f_g$ onde $f_g(h) = gh$ para $g, h \in G$, logo ρ é chamada representação regular de G.

Definição 2.1.3. Se $\rho : G \to GL(V)$ e $\rho' : FG \to GL(W)$ são duas representações do grupo G, dizemos que ρ e ρ' são equivalentes, $\rho \sim \rho'$, se V e W são isomorfos como FG-módulos.

Definição 2.1.4. Uma representação $\rho : G \to GL(V)$ é irredutível se V é um FG-módulo irredutível. ρ é dita completamente redutível se V é soma direta de FG-submódulos irredutíveis.

Uma ferramenta básica para o estudo de representações de grupos finitos quando $\operatorname{char} F = 0$ é o Teorema de Maschke. Lembremos que uma álgebra é dita semissimples se seu radical de Jacobson é zero.

A prova do seguinte teorema pode ser encontrado em [28].

Teorema 2.1.5 (Maschke)**.** *Sejam G um grupo finito e F um corpo tal que* $\operatorname{char} F = 0$ *ou* $\operatorname{char} F = p > 0$ *e $p \nmid |G|$. Então, a álgebra de grupo FG é semissimples.*

Usando os Teoremas de Wedderburn, Wedderburn-Artin e o Teorema de Maschke, podemos escrever a decomposição de Wederburn de FG,

$$FG \cong M_{n_1}(D^{(1)}) \oplus \cdots \oplus M_{n_k}(D^{(k)})$$

onde $D^{(1)}, \ldots, D^{(k)}$ são álgebras de divisão de dimensão finita sobre F. Dessa forma temos que M é um FG-módulo irredutível se, e somente se, M é um $M_{n_i}(D^{(i)})$-módulo irredutível para algum i.

Corolário 2.1.6. *Sejam G um grupo finito e F um corpo tal que* $\operatorname{char} F = 0$ *ou* $\operatorname{char} F = p > 0$ *e $p \nmid |G|$. Então, cada representação de G é completamente redutível e o número de representações não equivalentes de G é igual ao número de componentes simples na descomposição de Wedderburn da álgebra de grupo FG.*

É conhecido que $M_{n_i}(D^{(i)})$ tem apenas um submódulo irredutível (a menos de isomorfismo), isomorfo a $\displaystyle\sum_{j=1}^{n_i} D^{(i)}e_{ji}$. Note que a decomposição de FG também pode ser feita em termos de representações por meio da representação regular, assim temos que

$$FG \cong n_1 J_1 \oplus \cdots \oplus n_k J_k$$

onde $J_i \cong \displaystyle\sum_{j=1}^{n_i} D^{(i)}e_{ji}$ e n_i é a multiplicidade de J_i em FG. Além disso, n_i é o grau da representação J_i, assim $n_i = \dim J_i$. Do anterior temos a seguinte proposição:

Proposição 2.1.7. *Sejam G um grupo finito e F um corpo tal que* $\operatorname{char} F = 0$ *ou* $\operatorname{char} F = p > 0$ *e $p \nmid |G|$. Então, cada representação irredutível de G aparece na representação regular de G com multiplicidade igual ao seu grau.*

Agora vamos falar de um resultado que relaciona a quantidade de representações irredutíveis de um grupo G sobre seu corpo de decomposição e o número de classes de conjugação. Lembremos que o corpo de decomposição de G é o menor corpo onde cada representação do grupo é completamente redutível.

Proposição 2.1.8. *Seja G um grupo finito e F o corpo de decomposição de G. Então, o número de representações irredutíveis não equivalentes de G sobre F é igual ao número de classes de conjugação de G.*

Agora vamos definir o caracter de uma representação, que apresenta relações importantes com as multiplicidades dos J_i na decomposição de FG.

Definição 2.1.9. Seja $\rho : G \to GL(V)$ uma representação de um grupo G. Então a função $\chi_\rho : G \to F$ dada por $\chi_\rho(g) = \operatorname{tr}(\rho(g))$ é chamada caracter da representação ρ e $\dim V = \chi_\rho(1)$ é chamado o grau do caracter χ_ρ.

Diremos que χ_ρ é irredutível se ρ é irredutível. Notemos que $\chi_\rho(g) = \chi_\rho(h)$ se g e h são conjugados, segue que χ_ρ é constante nas classes de conjugação.

Definição 2.1.10. Seja G um grupo finito e F um corpo. Dizemos que uma função $\psi : G \to F$ é de classe sobre G se é constante nas classes de conjugação de G.

Podemos definir um produto interno $(,)$ sobre o espaço de funções de classe sobre G da seguinte forma

$$(\chi, \psi) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g)\psi(g^{-1})$$

onde χ, ψ são funções de classe.

Proposição 2.1.11. *Suponha que F é um corpo algebricamente fechado com característica zero e seja $J_1, \ldots, J_k$ uma lista completa de representações não equivalentes de G com caracteres $\chi_1, \ldots, \chi_k$, respectivamente. Seja $\rho : G \to GL(V)$ uma representação de G e escreva $V \cong m_1 J_1 \oplus \cdots \oplus m_k J_k$ com $m_i \geq 0$. Então*

1) $\chi_\rho = \sum_{i=1}^{k} m_i \chi_i$.

2) $(\chi_\rho, \chi_i) = m_i$ *para todo* i.

3) $(\chi_\rho, \chi_\rho) = \sum_{i=1}^{k} m_i^2$.

4) χ_ρ *é irredutível se, e somente se,* $(\chi_\rho, \chi_\rho) = 1$.

5) Se ρ' é outra representação de G. Então $\rho \sim \rho'$ se, e somente se, $(\chi_{\rho'}, \chi_\rho) = 1$.

Agora consideremos H um subgrupo de G e V um FG-módulo, logo V é um FH-módulo por restrição. Denotamos este módulo como $V^{\downarrow H}$ e é chamado de módulo induzido sobre H. Além disso, se χ é o caracter de V então denotamos por $\chi^{\downarrow H}$ ao caracter do módulo induzido.

Reciprocamente, se V é FH-módulo então $FG \otimes_{FH} V$ tem estrutura de FG-módulo, denotamos este módulo por $V^{\uparrow G}$ e é chamado módulo induzido por V. De novo, se χ é o caracter de V, denotamos como $\chi^{\uparrow G}$ ao caracter do módulo induzido por V.

2.2 Representações do Grupo Simétrico e Cocaracteres

Agora vamos relacionar as representações do grupo simétrico S_n com as partições de n com o objetivo de aplicar estes conceitos em polinômios multilineares. Cabe resaltar que o corpo de decomposição de S_n é $\mathbb{Q}$, assim nesta seção vamos considerar corpos com característica zero.

Definição 2.2.1. Seja $n \geq 1$ um inteiro. Uma partição λ é uma sequência finita de números inteiros positivos, $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ tal que $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_k$ e $n = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i$. Nesse caso, escrevemos $\lambda \vdash n$ ou $|\lambda| = n$.

Se $k = 1$, então $\lambda = (n)$ e para a partição λ com $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = r$ escrevemos $\lambda = (r^k)$.

Observemos que as classes de conjugação de S_n determinam unicamente uma partição de n. De fato, seja $\sigma \in S_n$, logo σ pode ser decomposta como produto de ciclos disjuntos, incluindo 1-ciclos. Esta decomposição é unica se exigimos que

$$\sigma = \pi_1 \cdots \pi_k$$

com $\pi_1, \ldots, \pi_k$ ciclos de comprimento $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_k \geq 1$, respectivamente. Logo a partição $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ está unicamente determinada pela classe de conjugação de σ.

Exemplo 2.2.2. Para S_4 temos que

$$\begin{aligned} [(1)] &\longleftrightarrow \lambda_1 = (1^4) \\ [(12)] &\longleftrightarrow \lambda_2 = (2,1,1) \\ [(12)(34)] &\longleftrightarrow \lambda_3 = (2,2) \\ [(123)] &\longleftrightarrow \lambda_4 = (3,1) \\ [(1234)] &\longleftrightarrow \lambda_5 = (4) \end{aligned}$$

Como o número de caracteres irredutíveis de S_n é igual ao número de classes de conjugação de S_n, temos que cada partição de n determina unicamente um caracter irredutível de S_n. Por isso denotamos os caracteres irredutíveis de S_n por χ_λ, onde $\lambda \vdash n$.

Vamos denotar como d_λ o grau do caracter irredutível χ_λ, isto é, $d_\lambda = \chi_\lambda(1)$.

Pelo Teorema de Maschke 2.1.5, pela Proposição 2.1.11 e pela observação acima temos o seguinte resultado:

Proposição 2.2.3. *Sejam F um corpo de característica zero e $n \geq 1$. Então existe uma correspondência biunívoca entre os cararacteres irredutíveis de S_n e as partições de n. Sendo $\{\chi_n | \lambda \vdash n\}$ uma lista de caracteres irredutíveis de S_n não equivalentes e $d_\lambda = \chi_n(1)$, temos*

$$FS_n \cong \bigoplus_{\lambda \vdash n} M_{d_\lambda}(F).$$

Note que se τ é a repesentação regular de FS_n, pela Proposição 2.1.11 segue que

$$\chi_\tau = \sum_{\lambda \vdash n} d_\lambda \chi_\lambda.$$

Para faciliar a visualização de alguns resultados que utilizam representações de S_n e polinômios multilineares, vamos definir alguns tipos de diagramas para representar as partições de n.

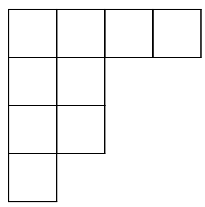
Definição 2.2.4. Seja $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \vdash k$, o diagrama de Young associado a λ é o subconjunto finito de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, definido como

$$D_\lambda = \{(i,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} | i = 1, \ldots, k, j = 1, \ldots, \lambda_i\}.$$

Exemplo 2.2.5. Para $\lambda = (4,2,2,1) \vdash 9$ temos que o diagrama associado é

$$D_{(4,2,2,1)} = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2),(4,1)\}.$$

Agora vamos construir o diagrama de Young usando caixas para representar cada ponto (i,j). Dessa forma



Definição 2.2.6. Seja $\lambda \vdash n$. Chamamos de partição conjugada de λ a partição $\lambda' = (\lambda'_1, \ldots, \lambda'_s)$ onde $\lambda'_1 \ldots, \lambda'_s$ são os comprimentos das colunas de D_λ.

Exemplo 2.2.7. A partição conjugada de $\lambda = (4,2,2,1)$ é $\lambda' = (4,3,1,1)$.

Definição 2.2.8. Seja $\lambda \vdash n$. Uma tabela de Young T_λ do diagrama D_λ é diagrama D_λ com as caixas preenchidas pelos inteiros $1, \ldots, n$.

Definição 2.2.9. Seja $\lambda \vdash n$. Uma tabela T_λ é dita standard se os inteiros em cada linha e cada coluna de T_λ crescem estritamente da esquerda para a direita e de cima para baixo, respectivamente.

Exemplo 2.2.10. Uma tabela standard da partição $\lambda = (4, 2, 2, 1)$ é

1	2	4	6
3	5		
7	9		
8			

Definição 2.2.11. Seja $\lambda \vdash n$. Uma tabela T_λ é dita semi-standard se os números das linhas são não decrescentes da esquerda para direita e os números das colunas são crescentes de cima para baixo.

Exemplo 2.2.12. Seja $\lambda = (4, 2, 1) \vdash 7$ então uma tabela semi-standard para λ é

1	1	2	4
2	2		
3			

Definição 2.2.13. Seja $n \geq 1$ um inteiro. Uma partição não ordenada α de n é uma sequência finita de inteiros positivos, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_t)$ tal que $\sum_{i=1}^{t} \alpha_i = n$. Nesse caso, escrevemos $\alpha \models n$.

Exemplo 2.2.14. $\alpha = (3, 4, 2, 1)$ é uma partição não ordenada de 10.

Definição 2.2.15. Seja D_λ o diagrama de Young da partição $\lambda \vdash n$ e $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \models n$. Dizemos que uma tabela de Young de forma λ e conteúdo α é o diagrama D_λ preenchido com inteiros positivos de tal forma que i aparece exatamente α_i vezes.

Exemplo 2.2.16. Seja $\lambda = (6, 3, 1) \vdash 10$ e $\alpha = (3, 4, 2, 1) \models 10$. Logo, uma tabela de Young de forma λ e conteúdo α é

1	2	2	2	3	4
2	1	1			
3					

Definição 2.2.17. Sendo $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \vdash n$ e $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_q)$ partições, escrevemos $\mu \leq \lambda$ se $q \leq p$ e $\mu_i \leq \lambda_i$ para todo $i = 1, \ldots, q$. Se $\lambda \geq \mu$, definimos $\lambda/\mu = (\lambda_1 - \mu_1, \lambda_2 - \mu_2, \ldots)$, que corresponde ao diagrama D_λ sem as caixas que também pertencem a D_μ.

Exemplo 2.2.18. Considere $\lambda = (4, 2, 2, 1)$ e $\mu = (3, 2)$ partições de 9 e 5 respectivamente. Note que $\lambda \geq \mu$ e $\lambda/\mu = (1, 0, 2, 1)$, assim

$$D_{\lambda/\mu} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline * & * & * & \\ \hline * & * & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-2} & & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-2} & \multicolumn{3}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array}$$

Definição 2.2.19. Para qualquer caixa $(i,j) \in D_\lambda$, definimos o número de gancho (i,j) como $h_{ij} = \lambda_i + \lambda'_j - i - j + 1$, onde $\lambda' = (\lambda'_1, \ldots, \lambda'_s)$ é a partição conjugada de $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$.

Exemplo 2.2.20. Para $\lambda = (4,2,2,1)$, vamos construir seu diagrama de Young com as caixas sendo preenchidas pelos números de gancho:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 7 & 5 & 2 & 1 \\ \hline 4 & 2 & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-2} 3 & 1 & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-2} 1 & \multicolumn{3}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array}$$

Observação 2.2.21. Notemos que $\lambda_i + \lambda'_j$ é a soma do número de caixas da linha i com o número de caixas da coluna. Subtraindo i e j e somando 1 obtemos o número de caixas à direita e abaixo da caixa (i,j) mais a própria caixa, ou o comprimiento do gancho correspondente a linha i e a coluna j.

Agora vamos enunciar um resultado que fala sobre o número de tabelas de Young associadas a uma partição λ e o grau do caracter irredutível χ_λ. A prova deste resultado pode ser encontrada em [19].

Teorema 2.2.22. *Dada uma partição $\lambda \vdash n$, o número de tabelas standard para λ é igual a d_λ, o grau do caracter irredutível χ_λ correspondente a λ.*

Com o resultado anterior e usando análise combinatória, deriva-se a proposição a seguir. A demonstração é encontrada em [19].

Proposição 2.2.23 (Fórmula de ganchos)**.** *Para $\lambda \vdash n$,*

$$d_\lambda = \frac{n!}{\prod\limits_{ij} h_{ij}}.$$

Note que induzir um módulo para cima ou para baixo não resulta necessariamente em um módulo irredutível. Para $G = S_n$ com $n \in \mathbb{N}$, podemos identificar S_n com o subgrupo de S_{n+1} de todas as permutações que fixam o inteiro $n+1$, sempre podemos decompor o módulo em módulos irredutíveis usando o seguinte teorema. A prova deste resultado pode ser encontrada em [19]

Teorema 2.2.24. *Seja M_λ um FS_n-módulo irredutível associado à partição $\lambda \vdash n$.*

1) Se $\lambda \vdash n$*, então* $M_\lambda^{\uparrow S_{n+1}} \cong \sum_{\mu \in \lambda^+} M_\mu$ *onde* λ^+ *é o conjunto de todas as partições de* $n+1$ *cujos diagramas são obtidos de* D_λ *adicionando uma caixa.*

2) Se $\mu \vdash n+1$*, então* $M_\mu^{\downarrow S_n} \cong \sum_{\lambda \in \mu^-} M_\lambda$ *onde* μ^- *é o conjunto de todas as partições de* n *cujos diagramas são obtidos de* D_μ *removendo uma caixa.*

Podemos também induzir um $(S_n \times S_m)$-módulo para cima como um S_{n+m}-módulo. Temos que $S_n \times S_m$ pode ser visto como subgrupo de S_{n+m} fazendo S_m agir sobre o conjunto $\{n+1, \ldots, n+m\}$. Sendo M um FS_n-módulo e N um FS_m-módulo, temos que $M \otimes N$ tem uma estrutura natural de $(S_n \times S_m)$-módulo, que denotamos por $(M \otimes N)^{\uparrow S_{n+m}}$.

Definição 2.2.25. Se M é um S_n-módulo e N é um S_m-módulo, então o produto tensorial externo de M e N é definido como

$$M \widehat{\otimes} N := (M \otimes N)^{\uparrow S_{n+m}}.$$

Lembrando que (n) representa a partição $\lambda = (\lambda_1) \vdash n$ onde $\lambda_1 = n$, temos o seguinte teorema

Teorema 2.2.26 (Regra de Young). *Sejam* $\lambda \vdash m$ *e* $n \geq 1$*. Então*

$$M_\lambda \widehat{\otimes} M_{(n)} \cong \sum M_\mu,$$

onde a soma percorre todas as partições μ *de* $n+m$ *tais que* $\mu_1 \geq \lambda_1 \geq \mu_2 \cdots \geq \mu_{n+m} \geq \lambda_{n+m}$*.*

Note que cada μ é obtido adicionando m caixas ao diagrama D_λ de forma que duas novas caixas não podem ficar na mesma coluna de D_μ. De fato, se adicionarmos uma nova caixa na coluna j na linha i, obtemos que $\mu_i > \lambda_i \geq \mu_{i+1}$. Como $\lambda_i \leq j-1$, temos que $\mu_{i+1} \leq j-1$, ou seja, não podemos adicionar outra caixa à coluna j.

A regra de Young é generalizada para quaisquer $M_\lambda \widehat{\otimes} M_\mu$ pela regra de Litlewood-Richardson, que usa o conceito de tabelas semi-standard e palavras reticuladas.

Definição 2.2.27. Uma palavra reticulada é uma sequência de números inteiros positivos tal que para qualquer $n \in \mathbb{N}$ temos que na subsequência

$$r_1, \ldots, r_n$$

a quantidade de números i é sempre maior ou igual a quantidade de números $i+1$.

Exemplo 2.2.28. A sequência $1, 2, 3, 1$ é uma palavra reticulada. De fato, note que as subsequências

1	1 aparece uma vez.
$1, 2$	1 aparece uma vez, 2 aparece uma vez.
$1, 2, 3$	1 aparece uma vez, 2 aparece uma vez e 3 aparece uma vez.
$1, 2, 3, 1$	1 aparece duas vezes, 2 aparece uma vez e 3 aparece uma vez.

Exemplo 2.2.29. A sequência $1, 1, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 1, 2$ não é uma palavra reticulada, pois na subsequência $1, 1, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 3, 2$ o número 1 aparece 4 vezes, enquanto o número 2 aparece 5 vezes.

Teorema 2.2.30 (Regra de Littlewood-Richardson)**.** *Sejam $\lambda \vdash n$ e $\mu \vdash m$. Então*

$$M_\lambda \widehat{\otimes} M_\mu \cong \sum_{\nu \vdash n+m} k^{\mu}_{\nu/\lambda} M_\nu,$$

onde $k^{\mu}_{\nu/\lambda}$ representa o número de tabelas semi-standard de forma ν/λ e contendo μ tal que a sequência formada pelos números que preenchem ν/λ, na ordem que estão da direita para esquerda e depois para baixo, é uma palavra reticulada.

A prova da Regra de Littlewood-Richardson pode ser encontrada em [28].

Exemplo 2.2.31. Seja $\lambda = (4, 2, 1) \vdash 7$ e $\mu = (2, 1, 1) \vdash 4$. Vamos encontrar alguns coeficientes de $k^{\mu}_{\nu/\lambda}$ onde $\nu \vdash 11$.

Note que $T_{\mu/\lambda}$ deve ser uma tabela semi-standard com os números formando uma palavra reticulada da direita para esquerda e para baixo. Além disso as opções para palavras reticuladas com os números 1, 1, 2 e 3 são (1 1 2 3), (1 2 1 3) e (1 2 3 1).

Se $\nu_1 = (8, 2, 1)$ então

$$D_{\nu_1/\lambda} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline * & * & * & * & & & & \\ \hline * & * \\ \cline{1-2} * \\ \cline{1-1} \end{array}$$

Assim não existe uma tabela semi-standard de forma ν_1/λ e conteúdo μ que forme uma palavra reticulada da direita para a esquerda, segue que $k^{\mu}_{\nu_1/\lambda} = 0$.

Se $\nu_2 = (6, 3, 2)$ então

$$D_{\nu_2/\lambda} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline * & * & * & * & & \\ \hline * & * & \\ \cline{1-3} * & \\ \cline{1-2} \end{array}$$

Assim

$$T_{\nu_2/\lambda} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline * & * & * & * & 1 & 1 \\ \hline * & * & 2 \\ \cline{1-3} * & 3 \\ \cline{1-2} \end{array}$$

é a única tabela de ν/λ que satisfaz as condições da Regra de Litlewood-Richardson, segue que $k^{\mu}_{\nu_1/\lambda} = 1$.

Se $\nu_3 = (5, 3, 2, 1)$, temos que

$$D_{\nu_3/\lambda} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline * & * & * & * & \\ \hline * & * & \\ \cline{1-3} * & \\ \cline{1-2} \\ \cline{1-1}\end{array}$$

assim

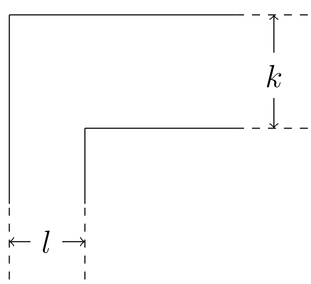
$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline * & * & * & * & 1 \\ \hline * & * & 1 \\ \cline{1-3} * & 2 \\ \cline{1-2} 3 \\ \cline{1-1}\end{array}\ , \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline * & * & * & * & 1 \\ \hline * & * & 2 \\ \cline{1-3} * & 1 \\ \cline{1-2} 3 \\ \cline{1-1}\end{array}\ \text{e} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline * & * & * & * & 1 \\ \hline * & * & 2 \\ \cline{1-3} * & 3 \\ \cline{1-2} 1 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

são tabelas de ν/λ que satisfazem as condições da Regra de Litlewood-Richardson, segue que $k^{\mu}_{\nu_1/\lambda} = 3$.

Definição 2.2.32. Vamos definir o gancho infinito $H(k, l)$ da seguinte forma

$$H(k, l) = \bigcup_{n \geq 1} \{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots) \vdash n | \lambda_{k+1} \leq l\}.$$

O nome de gancho infinito para $H(k, l)$ é totalmente apropiado, pois todos os diagramas de $H(k, l)$ estão dentro da área com formato de gancho da figura.



Lema 2.2.33. *Sejam $\lambda \vdash n$ e $\mu \vdash n'$ tais que $\mu \leq \lambda$. Se $n - n' \leq c$, então $d_\lambda \leq n^c d_\mu$*

Demonstração. Pela Propisicão 2.2.23 sabemos que

$$d_\lambda = \frac{n!}{\prod\limits_{i,j} h_{ij}}$$

onde os h_{ij} são os números de gancho de D_λ. Para $n - n' = c' \leq c$ e sendo h'_{ij} os números de gancho de D_μ, temos que

$$\frac{n'!}{\prod\limits_{i,j} h'_{ij}} = \frac{(n-c)!}{\prod\limits_{i,j} h'_{ij}}$$

Como o diagrama D_μ está contido no diagrama D_λ, temos que

$$\prod_{i,j} h'_{ij} \leq \prod_{i,j} h_{ij}$$

Assim

$$d_\lambda = \frac{n!}{\prod\limits_{i,j} h_{ij}} \leq \frac{n!}{\prod\limits_{i,j} h'_{ij}} \leq n^{c'} d_\mu \leq n^c d_\mu.$$

□

Lema 2.2.34. *Existem constantes $C, s > 0$ tais que*

$$\sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \lambda \in H(k,l)}} d_\lambda \leq C n^s (k+l)^n$$

Demonstração. Vamos construir uma partição $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \in H(k,l)$. Então, temos que $\lambda_{k+1} \leq l$, pela definição do gancho infinto $H(k,l)$. Assim, para escolha dos comprimentos das primeiras k linhas de D_λ, temos $(n+1)^k$ opções pois $0 \leq \lambda_i \leq n$ para todo $i = 1, \ldots, r$. Pelo mesmo motivo, para escolher os comprimentos das primeiras l colunas de D_λ, temos $(n+1)^l$ opções. Segue que o número total de diagramas de Young en $H(k,l)$ é limitado por $(n+1)^{l+k}$.

Precisamos mostrar que para cada $\lambda \in H(k,l)$ temos $d_\lambda \leq (k+l)^n$, assim

$$\sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \lambda \in H(k,l)}} d_\lambda \leq \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \lambda \in H(k,l)}} (k+l)^n \leq (k+l)^{k+l}(k+l)^n \leq C n^s (k+l)^n$$

para $C, s > 0$ apropriados.

Definamos

$$\lambda''_j = \begin{cases} \lambda'_j & \text{se } \lambda'_j \geq k \\ \\ 0 & \text{no caso contrário} \end{cases}$$

Para $j = 1, \ldots, l$ onde λ' é a partição conjugada de λ. Assim

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_k + \lambda''_1 + \cdots + \lambda''_l = n$$

Já que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k$ representa a quantidade de caixas de D_λ ate a linha k e $\lambda''_1 + \cdots + \lambda''_l$ a quantidade de caixas abaixo da linha k.

Agora, sendo $\prod\limits_{i,j} h_{ij}$ o produto dos números de gancho de D_λ, temos que

$$\prod_{i,j} h_{ij} = \prod_{i=1}^{k} \left(\prod_{j} h_{ij} \right) \prod_{\substack{j=1 \\ i \geq k+1}}^{l} \left(\prod_{i} h_{ij} \right) \geq \left(\prod_{i=1}^{k} \lambda_i! \right) \left(\prod_{j=1}^{l} \lambda''_j! \right) = \lambda_1! \cdots \lambda_k! \lambda''_1! \cdots \lambda''_l!$$

Com o anterior e a Proposição 2.2.23, temos que

$$d_\lambda = \frac{n!}{\prod\limits_{i,j} h_{ij}} \leq \frac{n!}{\lambda_1! \cdots \lambda_k! \lambda_1''! \cdots \lambda_l''}.$$

Dado que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k + \lambda_1'' + \cdots + \lambda_l'' = n$, podemos aplicar o Teorema Multinomial, isto é,

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n = \sum_{t_1, t_2, \ldots, t_m} \frac{n!}{t_1! t_2! \cdots t_m!} x_1^{t_1} x_2^{t_2} \cdots x_m^{t_m}.$$

Tomando $m = k + l$, $x_1 = x_2 = \cdots = x_{k+l} = 1$, $t_1 = \lambda_1, \ldots, t_k = \lambda_k$ e $t_{k+1} = \lambda_1'', \ldots, t_{k+l} = \lambda_l''$, obtemos

$$d_\lambda \leq \frac{n!}{\lambda_1! \cdots \lambda_k! \lambda_1''! \cdots \lambda_l''!} \leq (1 + \cdots + 1)^n = (k + l)^n.$$

□

Na continuação, a cada partição λ de n vamos associar um polinômio simétrico chamado polinômio de Schur.

Definição 2.2.35. Seja $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ uma partição de n. Definimos o polinômio de Schur correspondente a λ como

$$S_\lambda(t_1, \ldots, t_m) := \frac{D(\lambda_1 + m - 1, \lambda_2 + m - 2, \ldots, \lambda_{m-1} + 1, \lambda_m)}{D(m_1, m_2, \ldots, 1, 0)},$$

onde $D(\mu_1, \ldots, \mu_n) = \begin{vmatrix} t_1^{\mu_1} & t_2^{\mu_1} & \cdots & t_{m-1}^{\mu_1} & t_m^{\mu_1} \\ t_1^{\mu_2} & t_2^{\mu_2} & \cdots & t_{m-1}^{\mu_2} & t_m^{\mu_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t_1^{\mu_{m-1}} & t_2^{\mu_{m-1}} & \cdots & t_{m-1}^{\mu_{m-1}} & t_m^{\mu_{m-1}} \\ t_1^{\mu_m} & t_2^{\mu_m} & \cdots & t_{m-1}^{\mu_m} & t_m^{\mu_m} \end{vmatrix}.$

Exemplo 2.2.36. Seja $n = m = 3$ e $\lambda = (2, 1)$. Então

$$\begin{aligned} S_\lambda(t_1, t_2, t_3) &= \frac{D(2+2, 1+1, 0+0)}{D(2,1,0)} = \frac{D(4,2,0)}{D(2,1,0)} \\ &= \frac{(t_1^2 - t_2^2)(t_1^2 - t_3^2)(t_2^2 - t_3^2)}{(t_1 - t_2)(t_1 - t_3)(t_2 - t_3)} = (t_1 + t_2)(t_1 + t_3)(t_2 + t_3) \\ &= 2t_1t_2t_3 + t_1^2t_2 + t_1t_2^2 + t_1^2t_3 + t_1t_3^2 + t_2^2t_3 + t_2t_3^2. \end{aligned}$$

Agora vamos aplicar a teoria de representações do grupo simétrico para os polinômios multilineares. Além disso, introduziremos o conceito de cocaracter de uma PI-álgebra.

Seja A um PI-álgebra sobre um corpo F de característica zero, pelo Corolário 1.4.11 as identidades de A são determinadas por polinômios multilineares. Seja

$$P_n = \langle x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)} | \sigma \in S_n \rangle$$

o espaço vetorial dos polinômios multilineares nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$ na álgebra livre $F\langle X\rangle$. Consideremos a função $\varphi : FS_n \to P_n$ dada por

$$\varphi\left(\sum_{\sigma\in S_n}\alpha_\sigma\sigma\right) = \sum_{\sigma\in S_n}\alpha_\sigma x_{\sigma(1)}\cdots x_{\sigma(n)}$$

que é um isomorfismo linear. Por isso, vamos usar a mesma notação para um elemento de $f \in FS_n$ e para sua imagem em P_n. Esse isomorfismo torna P_n um S_n-bimódulo. A S_n-ação à esquerda pode ser vista como

$$\sigma f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$$

para $\sigma \in S_n$ e $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_n$. De fato, por linearidade, é suficiente provar esse fato para os monômios de P_n e denotemos

$$x_{\pi(1)}\cdots x_{\pi(n)} = M_\pi(x_1, \ldots, x_n).$$

Precisamos provar que $\sigma M_\pi(x_1, \ldots, x_n) = M_\pi(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$. Escrevendo

$$x_{\sigma(1)} = y_1, \ldots, x_{\sigma(n)} = y_n$$

temos que

$$\begin{aligned} M_\pi(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) &= M_\pi(y_1, \ldots, y_n) \\ &= y_{\pi(1)}\cdots y_{\pi(n)} \\ &= x_{\sigma\pi(1)}\cdots x_{\sigma\pi(n)} \\ &= \sigma M_\pi(x_1, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

A S_n-ação à direita é definida da seguinte maneira: se $\sigma \in S_n$, podemos escrever

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix}$$

Então $x_{\sigma(1)}\cdots x_{\sigma(n)} = x_{i_1}\cdots x_{i_n}$ e para $\tau \in S_n$ temos que

$$(x_{i_1}\cdots x_{i_n})\tau = x_{i_{\tau(1)}}\cdots x_{i_{\tau(n)}}.$$

Dessa forma, temos que

$$\begin{aligned} \sigma(x_{\tau(1)}\cdots x_{\tau(n)}) &= x_{i(1)}\cdots x_{i(n)} \\ &= (x_{i_1}\cdots x_{i_n})\tau \\ &= (x_{\sigma(1)}\cdots x_{\sigma(n)})\tau. \end{aligned}$$

Queremos estudar o espaço $P_n \cap \mathrm{Id}(A)$. Como os T-ideais são invariantes por permutações de variáveis e $P_n \cap \mathrm{Id}(A)$ é um T-ideal, segue que $P_n \cap \mathrm{Id}(A)$ é um S_n-submódulo à esquerda de P_n. Logo

$$P_n(A) := P_n/(P_n \cap \mathrm{Id}(A))$$

possui uma estrutura induzida de S_n-módulo. Se $F\langle X\rangle$ é a álgebra livre de posto enumerável, $X = \{x_1, x_2 \ldots, x_n\}$, então $P_n(A)$ é o espaço dos elementos multilineares nas primeiras n variáveis da álgebra relativamente livre $F\langle X\rangle / \operatorname{Id}(A)$. Assim podemos definir o n-ésimo cocaracter de A.

Definição 2.2.37. Seja A uma PI-álgebra sobre um corpo F de característica zero. O S_n-caracter do S_n-módulo $P_n(A)$ é chamado de n-ésimo cocaracter de A e é denotado por $\chi_n(A)$.

Escrevendo o n-ésimo cocaracter em caracteres irredutíveis, temos que

$$\chi_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda,$$

onde χ_λ é o S_n-caracter irredutível associado à partição $\lambda \vdash n$ e $m_\lambda \geq 0$ é a multiplicidade correspondente. Agora vamos enunciar um teorema que nos permite calcular o cocaracter de uma PI-álgebra em termos dos cocaracteres de outras PI-álgebras, se o T-ideal da álgebra inicial é o produto dos T-ideais das demais. Este resultado pode ser encontrado em [6].

Teorema 2.2.38 (Berele-Regev)**.** *Sejam A, A_1, A_2 PI-álgebras sobre um corpo F de característica zero. Se $\operatorname{Id}(A) = \operatorname{Id}(A_1)\operatorname{Id}(A_2)$ então*

$$\chi_n(A) = \chi_n(A_1) + \chi_n(A_2) + \chi_{(1)}\widehat{\otimes}\sum_{j=0}^{n-1}\chi_j(A_1)\widehat{\otimes}\chi_{n-j-1}(A_2) - \sum_{j=0}^{n}\chi_j(A_1)\widehat{\otimes}\chi_{n-j}(A_2),$$

onde $\chi_{(1)}$ é o caracter associado a partição (n).

Agora vamos falar sobre as séries de Hilbert e sua relação com os cocaracteres de uma PI-álgebra, pois no próximo capítulo provaremos um resultado sobre a dimensão de Gelfand-Kirillov que precisa deste conceito. A referência principal desta parte é [9].

Definição 2.2.39. Um espaço vetorial V é graduado se é a soma direta de subespaços $V^{(n)}$, isto é

$$V = \bigoplus_{n\geq 0} V^{(n)}.$$

Os subespaços $V^{(n)}$ são chamados componentes homogêneas de grau n. De maneira análoga, V é multigraduado se

$$V = \bigoplus_{\substack{1\leq i\leq m\\ n_i\geq 0}} V^{(n_1,\ldots,n_m)}.$$

Os subespaços $V^{(n_1,\ldots,n_m)}$ são chamados componentes homogêneas de multigrau $(n_1, \ldots, n_m)$.

Exemplo 2.2.40. $F[x_1, \ldots, x_m]$ é graduado se assumimos $V^{(n)}$ como o subespaço dos polinômios homogêneos (no sentido usual) de grau n. Também o espaço dos polinômios comutativos sobre F nas indeterminada $x_1, \ldots, x_m$ é multigraduado se

$$V^{(n_1,\ldots,n_m)} = \{f | f \text{ é multi-homogêneo e} \deg_{x_i} f = n_i, 1 \leq i \leq m\}.$$

Definição 2.2.41. Seja $V = \bigoplus_{n\geq 0} V^{(n)}$ um espaço vetorial graduado talque $\dim V^{(n)} < \infty$ para todo n. A série formal de potências

$$H(V,t) = \sum_{n\geq 0} \dim V^{(n)} t^n$$

é chamada série de Hilbert de V. Se V é um espaço multigraduado, isto é,

$$V = \bigoplus_{n} V^{(n_1,\dots,n_m)}$$

onde $n = (n_1, \dots, n_m)$, logo a série de Hilbert de V é

$$H(V, t_1, \dots, t_m) = \sum_{n} \dim V^{(n_1,\dots,n_m)} t_1^{n_1} \cdots t_m^{n_m}.$$

Observação 2.2.42. Quando a série de Hilbert converge a uma função $f(t)$ numa vizinhança do zero, escrevemos $H(V,t) = f(t)$.

Exemplo 2.2.43. Seja $F[x]$ a álgebra dos polinômios comutativos na indeterminada x sobre o corpo F. Se $V^{(n)} = \langle x^n \rangle$ para $n \geq 1$ e $V^{(0)} = F$, então

$$F[x] = \bigoplus_{n\geq 0} V^{(n)}.$$

Como $\dim V^{(n)} = 1$ para todo n, temos que

$$H(F[x], t) = \sum_{n\geq 0} t^n = \frac{1}{1-t}.$$

Na continuação vamos definir a série de Hilbert para álgebras relativamente livres.

Definição 2.2.44. Seja A uma PI-álgebra sobre o corpo F, logo a série de Hilbert de A em m variaveis é a serie de Hilbert da álgebra relativamente livre de posto m da variedade $\mathrm{var}(A)$, isto é, $H_m(A) = H(R_m(A), t_1, \dots, t_m)$.

Também existe um resultado análogo ao Teorema 2.2.38 em séries de Hilbert. Este resultado pode ser encontrado em [6].

Teorema 2.2.45. *Sejam A, A_1, A_2 PI-álgebras sobre um corpo F de característica zero. Se $\mathrm{Id}(A) = \mathrm{Id}(A_1)\,\mathrm{Id}(A_2)$ então*

$$H_k(A) = H_k(A_1) + H_k(A_2) + (t_1 + \cdots + t_k - 1) H_k(A_1) H_k(A_2).$$

Agora vamos enunciar um teorema que relaciona a série de Hilbert de uma álgebra relativamente livre de posto finito com cocaracteres. A prova deste resultado pode ser encontrada em [9].

Teorema 2.2.46 (Berele-Drensky). *Seja A uma PI-álgebra sobre um corpo F com característica zero. Considere o n-ésimo cocaracter de A*

$$\chi_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda,$$

onde χ_λ é o S_n-caracter irredutível associado à partição $\lambda \vdash n$ e $m_\lambda \geq 0$ é a multiplicidade correspondente. Então

$$H(F_m(A), t_1, \ldots, t_m) = \sum_{n \geq 0} \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda S_\lambda(t_1, \ldots, t_m),$$

onde $S_\lambda(t_1, \ldots, t_m)$ e o polinômio de Schur, definido em 2.2.35.

3 Codimensão e Expoente de uma PI-Álgebra

Neste capítulo definiremos uma sequência numérica de inteiros não negativos que de certa forma medem a "taxa" de crescimento das identidades polinomiais de uma álgebra, tal sequência é chamada sequência de codimensões da álgebra. Falaremos de forma breve de álgebras graduadas e alguns resultados do Kemer, os quais são alicerces da teoria estrutural de PI-álgebras. Finalmente introduziremos os conceitos de PI-expoente e dimensão de Gelfand-Kirillov. Cabe resaltar que neste capítulo consideraremos apenas corpos de característica zero.

3.1 Codimensão

Seja F um corpo de característica zero, considere $F\langle X\rangle$ a álgebra livre associativa de posto enumerável em $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ e A uma PI-álgebra. Lembremos que pelo Corolário 1.4.11, o T-ideal de identidades de A é gerado pelos polinômios multilineares contidos nele. Assim $\mathrm{Id}(A)$ é gerado pelos subespaços

$$(P_1 \cap \mathrm{Id}(A)) \oplus (P_2 \cap \mathrm{Id}(A)) \oplus \cdots \oplus (P_n \cap \mathrm{Id}(A)) \oplus \ldots$$

em $F\langle X\rangle$. Se A satisfaz todas as identidades de alguma álgebra B então $P_n \cap \mathrm{Id}(B) \subseteq P_n \cap \mathrm{Id}(A)$ e $\dim(P_n \cap \mathrm{Id}(B)) \leq \dim(P_n \cap \mathrm{Id}(A))$, para todo $n = 1, 2, \ldots$. Assim as dimensões dos subespaços $(P_n \cap \mathrm{Id}(A))$ nos dão de alguma maneira o crescimento das identidades de A.

Definição 3.1.1. Seja A uma PI-álgebra. Definimos a $n-$ésima codimensão de A, $c_n(A)$, como a dimensão do subespaço $P_n/(\mathrm{Id}(A) \cap P_n)$.

Exemplo 3.1.2. Seja A uma F-álgebra nilpotente e n seu índice de nilpotência. Então dados $a_1, \ldots, a_m \in A$ com $m \geq n$, temos que $a_1 \ldots a_m = 0$. Portanto

$$x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(m)} \in \mathrm{Id}(A)$$

para todo $\sigma \in S_m$, segue que $\mathrm{Id}(A) \cap P_m = P_m$ e daí $c_m(A) = 0$ para todo $m \geq n$.

Exemplo 3.1.3. Considere A uma álgebra comutativa sobre o corpo F, então

$$x_1 \cdots x_n \equiv x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)} \mod (P_n \cap \mathrm{Id}(A)),$$

assim $\overline{x_1 \cdots x_n} = \overline{x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)}}$ em $P_n/(P_n \cap \mathrm{Id}(A))$. Portanto $\overline{x_1 \cdots x_n}$ gera a $P_n/(P_n \cap \mathrm{Id}(A))$ como espaço vetorial, segue que

$$c_n(A) = \dim_F P_n/(P_n \cap \mathrm{Id}(A)) \leq 1$$

para todo $n \geq 1$.

Notação: Se $\mathcal{V}$ é uma variedade de álgebras tal que $\mathcal{V} = \mathrm{var}(A)$, então definimos $c_n(\mathcal{V}) = c_n(A)$.

Teorema 3.1.4. *Seja A uma álgebra de dimensão finita sobre o corpo F, $\dim_F A = d$. Então $c_n(A) \leq d^n$ para todo $n \geq 1$.*

Demonstração. Seja $\{a_1, \ldots, a_d\}$ uma base de A sobre F. Logo um polinômio multilinear é uma identidade de A se, e somente se, f é nulo para qualquer avaliação ϕ, $\phi(x_1) = a_{i_1}, \ldots, \phi(x_n) = a_{i_n}$, isto é

$$f(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}) = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma (a_{\sigma(i_1)} \ldots a_{\sigma(i_n)}) = 0. \tag{3.1}$$

Note que o número total de avaliações é d^n, pois para cada x_i podemos tomar d valores distintos. Portanto podemos considerar 3.1 como um sistema de d^n equações lineares com $n!$ indeterminadas α_σ e $\sigma \in S_n$.

O espaço de solução de 3.1 tem dimensão $n! - r$ onde r é o posto de 3.1, $r \leq d^n$. Além disso, qualquer $n!$-upla de coeficientes α_σ com $\sigma \in S_n$ dá uma identidade multilinear de A, assim soluções linearmente independentes dão identidades linearmente independentes. Segue que

$$\dim(P_n \cap \mathrm{Id}(A)) = n! - r.$$

Logo $c_n(A) = \dim P_n/(\mathrm{Id}(A) \cap P_n) = r \leq d^n$.

□

Agora vamos provar que para qualquer $PI-$álgebra A sobre F, a codimensão não muda sobre extensões do corpo base F se este é infinito. Seja K uma extensão de F, logo $\overline{A} = A \otimes_F K$ é uma $K-$álgebra, além de ser uma F-álgebra. Considere as identidades de $\overline{A}$ com coeficientes em K e denotemos por $c_n^K(\overline{A})$ a $n-$ésima codimensão de $\overline{A}$ vista como uma $K-$álgebra.

Lembremos que pelo Lema 1.5.2 se F é infinito a álgebra $\overline{A}$, vista como uma $F-$álgebra, satisfaz as identidades multilineares de A. Seja $c_n(A) = m$ e considere $f_1, \ldots, f_m$ uma base de $P_n/(P_n \cap \mathrm{Id}(A))$, logo qualquer combinação não trivial

$$\alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_m f_m$$

não é uma identidade de A. Por outro lado, para todo $f \in P_n$, existem $\beta_1, \ldots, \beta_m \in F$ tais que

$$h = h(x_1, \ldots, x_n) = f - \sum_i \beta_i f_i \equiv 0$$

é uma identidade de A. Portanto $h(x_1, \ldots, x_n)$ é uma identidade de $\overline{A}$ com coeficientes em K, donde segue que $c_n^K(\overline{A}) \leq c_n(A)$.

Verifiquemos que $f_1, \ldots, f_m$ são linearmente independentes (mod $\mathrm{Id}(\overline{A})$) sobre K. Assumamos que

$$f = \beta_1 f_1 + \cdots + \beta_m f_m \equiv 0$$

é uma identidade de $\overline{A}$ com $\beta_1, \ldots, \beta_k \in K$. Escolhamos uma base $\mathcal{B} = \{t_j\}_j$ de K sobre F, logo existem $\gamma_{ij} \in F$ tais que

$$\beta_i = \sum_j \gamma_{ij} t_j, \ i = 1, \ldots, m, \ j = 1, 2, \ldots$$

Agora avaliemos $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ nos tensores $a_1 \otimes 1, \ldots, a_n \otimes 1$ com $a_1, \ldots, a_n \in A$. Assim, obtemos que

$$0 = f(a_1 \otimes 1, \ldots, a_n \otimes 1) = \sum_{ij} \gamma_{ij} t_j f_i(a_1 \otimes 1, \ldots, a_n \otimes 1) = \sum_j (\sum_i \gamma_{ij} f_i(a_1, \ldots, a_n)) \otimes t_j.$$

Daí segue que $\sum_j \gamma_{ij} f_i(a_1, \ldots, a_n) = 0$ para todo $a_1, \ldots, a_n \in A$, pois os t_j são linearmente independentes, logo $\sum_j \gamma_{ij} f_i \equiv 0$ é uma identidade de A para todo $j = 1, 2, \ldots$. Mas pela escolha de $f_1, \ldots, f_m$ todos os coeficientes γ_{ij} são nulos, então $\beta_1 = \cdots = \beta_m = 0$. Portanto $f_1, \ldots, f_m$ são linearmente independentes sobre K, logo $c_n^K(\overline{A}) = c_n(A)$.

O anterior nos permite enunciar o seguinte teorema:

Teorema 3.1.5. *Se A é uma álgebra sobre um corpo infinito F e K é uma extensão de F, então para $n = 1, 2, \ldots$ temos*

$$c_n{}^K(\overline{A}) = c_n(A).$$

3.2 Álgebras Graduadas e Teorema de Kemer

Nesta seção vamos falar de maneira breve sobre a noção de álgebras graduadas e enunciaremos o Teorema de Kemer, que nos garante que toda PI-álgebra tem T-ideal gerado pelo envelope de Grassmann de uma superálgebra de dimensão finita.

Definição 3.2.1. Seja A uma $F-$álgebra e G um grupo, dizemos que A é uma álgebra G-graduada se A pode ser escrita como soma direta de subespaços $A = \bigoplus_{g \in G} A^{(g)}$ tal que $A^{(g)} A^{(h)} \subseteq A^{(gh)}$, para todo $g, h \in G$.

Da definição anterior segue que todo $a \in A$ pode ser escrito de maneira única como soma finita, $a = \sum_{g \in G} a^{(g)}$ com $a^{(g)} \in A^{(g)}$. Os subespaços $A^{(g)}$ são chamados componentes homogêneas de A, logo um elemento $a \in A$ é dito homogêneo se $a \in A^{(g)}$ para algum $g \in G$.

Definição 3.2.2. Um subespaço $B \subseteq A$ é graduado ou homogêneo se $B = \sum_{g \in G}(B \cap A^{(g)})$.

Em outras palavras B é graduado se, e somente se, para qualquer $b \in B$, $b = \sum_{g \in G} b^{(g)}$ implica que $b^{(g)} \in B$ para todo $g \in G$. De forma similar podemos definir subálgebras graduadas, ideais graduados, etc.

Notemos que se H é um subgrupo de G então $B = \oplus_{h \in H} A^{(h)}$ é uma subálgebra graduada de A.

Exemplo 3.2.3. Toda álgebra A pode ser graduada por qualquer grupo G da seguinte forma $A = A^{(e)}$ e $A^{(g)} = 0$ para $g \neq e$, onde e é a unidade do grupo.

Exemplo 3.2.4. A álgebra livre associativa de posto enumerável, $F\langle X \rangle$, é $\mathbb{Z}$-graduada. De fato, seja $A = F\langle X \rangle$ então $A^{(n)} = 0$ se $n \leq 0$ e no caso contrário $A^{(n)}$ é o gerado linear dos monômios de grau total n, assim $A = \oplus_{n \in \mathbb{Z}} A^{(n)}$.

Exemplo 3.2.5. Seja $A = M_2(F)$ e $G = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$ o produto direto de dois grupos cíclicos de ordem dois. Definamos

$$A^{(1)} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \ A^{(a)} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle, \ A^{(b)} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \text{ e } A^{(ab)} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

É claro que $A = \oplus_{g \in G} A^{(g)}$ e $A^{(g)}A^{(h)} = A^{(gh)}$. Logo A é G-graduada.

Exemplo 3.2.6. Seja $A = M_k(F)$ e G um grupo arbitrário. Dado $(g_1, \ldots, g_k) \in G^k$ definamos $A^{(g)} = \langle e_{ij} | g_i^{-1} g_j = g \rangle$, onde e_{ij} são as matrizes canônicas.

Note que $e_{ij} \in A^{(g_i^{-1} g_j)}$, logo $A \subseteq \sum_{g \in G} A^{(g)}$. Além disso, é claro que $A^{(h)} \cap \sum_{g \neq h} A^{(g)} = \{0\}$ e daí $A = \oplus_{g \in G} A^{(g)}$. Provemos que $A^{(g)}A^{(h)} \subseteq A^{(gh)}$. De fato, seja $a \in A^{(g)}A^{(h)}$ com $a \neq 0$, então

$$a = \sum \alpha e_{ij} e_{jk}$$

onde $e_{ij} \in A^{(g)}$, $e_{jk} \in A^{(h)}$ e $\alpha_{ij} \in F$, então $e_{ik} \in A^{(gh)}$, assim $a \in A^{(gh)}$.

Definição 3.2.7. Uma álgebra A $\mathbb{Z}_2$-graduada é dita superálgebra. Os subespaços $A^{(0)}$ e $A^{(1)}$ são chamados componentes par e ímpar de A, respectivamente.

Exemplo 3.2.8. $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} ; a, b \in F \right\}$ é uma superálgebra com subespaços homogêneos

$$A^{(0)} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}; b \in F \right\} \text{ e } A^{(1)} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix}; b \in F \right\}.$$

Lembremos que a álgebra de Grassmann, G, sobre um espaço vetorial de dimensão enumerável sobre um corpo F com char $F \neq 2$ é o quociente de $F\langle X\rangle$ com o ideal I gerado pelo conjunto dos polinômios $\{x_i x_j + x_j x_i | \, i, j \geq 1\}$. Assim se $e_i = x_i + I$, então a álgebra tem a seguinte apresentação:

$$G = \langle 1, e_1, e_2, \ldots | e_i e_j = -e_j e_i \quad i, j \geq 1 \rangle.$$

Uma base para G é $\{1, e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k} | 1 \leq i_1 < i_2 \ldots < i_k\}$. Notemos que G é $\mathbb{Z}_2$-graduada, de fato $G = G^{(0)} \oplus G^{(1)}$ onde $G^{(0)}$ é o subespaço gerado pelos monômios com comprimento par e $G^{(1)}$ é o subespaço gerado pelos monômios com comprimento ímpar.

Na continuação vamos falar da codimensão da álgebras de Grassman G. A prova do seguinte teorema pode ser encontrada em [16], Teorema 4.1.8.

Teorema 3.2.9. *Se G é a álgebra de Grassmann de dimensão infinita sobre um corpo F de característica zero, então*

1) $\mathrm{Id}(G)$ *é gerado pelo polinômio* $[[x_1, x_2], x_3]$.

2) $c_n(G) = 2^{n-1}$

Dada uma superálgebra A é possível obter uma nova superálgebra, utilizando a álgebra de Grasmman. Esta nova álgebra é chamada o envelope de Grassman da álgebra A.

Definição 3.2.10. Seja $A = A^{(0)} \oplus A^{(1)}$ uma superálgebra. A álgebra

$$G(A) = (A^{(0)} \otimes G^{(0)}) \oplus (A^{(1)} \otimes G^{(1)})$$

é chamada o envelope de Grassman da álgebra A.

Agora vamos enunciar alguns resultados que permitem estudar propriedades estruturais variedades de álgebras de uma maneira mais simples. As provas dos resultados podem ser encontrados em [22] e [23] respectivamente.

Teorema 3.2.11 (Kemer)**.** *Dada uma variedade de álgebras $\mathcal{V}$ não trivial, existe uma superálgebra $A = A^{(0)} \oplus A^{(1)}$ de dimensão finita tal que $\mathcal{V} = \mathrm{var}(G(A))$.*

Em particular quando a variedade é gerada por uma álgebra finitamente gerada temos o seguinte:

Teorema 3.2.12. *Se A é uma PI-álgebra finitamente gerada, existe uma álgebra da dimensão finita B tal que* $\mathrm{var}(A) = \mathrm{var}(B)$.

O seguinte resultado nos dá uma relação entre as variedades que satisfazem uma identidade standard, com as variedadess que não contem a álgebra de Grassmann. A prova deste pode ser encontrado em [16], Teorema 7.1.2.

Teorema 3.2.13. *Uma variedade $\mathcal{V}$ satifaz uma identidade standard se, e somente se, a álgebra de Grasmann $G \notin \mathcal{V}$.*

Na continuação provaremos algumas equivalências de variedades geradas por álgebras de dimensão finita. Para isto precisamos do seguinte lema, cuja prova pode ser encontrada em [16], Lema 7.1.3.

Lema 3.2.14. *Se $A = A^{(0)} \oplus A^{(1)}$ é uma superálgebra de dimensão finita tal que $G(A)$ satisfaz a identidade standard, então o ideal gerado por $A^{(1)}$ é nilpotente.*

Teorema 3.2.15. *Para uma variedade de álgebras $\mathcal{V}$, as seguintes condições são equivalentes:*

1) $\mathcal{V} = \mathrm{var}(A)$, *para alguma álgebra de dimensão finita A.*

2) $\mathcal{V} = \mathrm{var}(A)$, *onde A é uma álgebra finitamente gerada.*

3) $\mathcal{V}$ satisfaz a identidade de Capelli.

4) $\mathcal{V}$ satisfaz a identidade standard.

Demonstração. A equivalência entre 1) e 2) segue do Teorema 3.2.12. A implicação 3) $\rightarrow$ 4) é óbvia.

4) $\rightarrow$ 1) Suponhamos que $\mathcal{V}$ satisfaz a identidade standard. Pelo Teorema 3.2.11, $\mathcal{V}$ é gerada pelo envelope de Grasmann $G(A)$ de uma superálgebra $A = A^{(0)} \oplus A^{(1)}$ de dimensão finita.

Assim, temos que $A^{(1)} \otimes G^{(1)}$ também gera um ideal nilpotente, pois pelo Lema 3.2.14 $A^{(1)}$ gera um ideal nilpotente visto que $G(A)$ satisfaz uma identidade standard. Isto é, existe um inteiro positivo m tal que o produto de elementos de $A^{(1)} \otimes G^{(1)}$ que contenha ao menos m elementos do tipo $a \otimes g$, $a \in A^{(1)}$, $g \in G^{(1)}$, é nulo.

Agora fixemos uma base $\{a_1, \ldots, a_k\}$ de $A^{(1)}$ e seja $t = \max\{m, k\}$. Denotemos por C a subálgebra de $G(A)$ gerada por $A^{(0)} \otimes 1$ e $\{a_i \otimes e_j | 1 \leq i \leq t, 1 \leq j \leq k\}$ onde $e_1, e_2, \ldots$ são os geradores canônicos de G. Logo C é uma álgebra homogênea e $\dim C < \infty$.

Afirmamos que $\mathcal{V} = \mathrm{var}(C)$. De fato, como C é subálgebra de $G(A)$ temos que $\mathrm{Id}(\mathcal{V}) \subseteq \mathrm{Id}(C)$. Suponhamos que existe $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ identidade de C tal que $f \notin \mathrm{Id}(\mathcal{V})$, logo podemos achar $b_1, \ldots, b_s \in A^{(0)}$, $g_1, \ldots g_s \in G^{(0)}, a_{i_1}, \ldots, a_{i_{n-s}} \in \{a_1, \ldots, a_k\}$ e $h_1, \ldots, h_{n-s} \in G^{(1)}$ tais que

$$f(b_1 \otimes g_1, \ldots, b_s \otimes g_s, a_{i_1} \otimes h_1 \ldots a_{i_{n-s}} \otimes h_{n-s}) \neq 0$$

em $G(A)$. Por outro lado,

$$f(b_1\otimes g_1,\dots,b_s\otimes g_s,a_{i_1}\otimes h_1\dots a_{i_{n-s}}\otimes h_{n-s}) = f'(b_1,\dots,b_s,a_{i_1},\dots,a_{i_{n-s}})\otimes g_1\dots g_s h_1\dots h_{n-s},$$

para algum polinômio f' multilinear e os elementos $f'(b_1,\dots,b_s,a_{i_1},\dots,a_{i_{n-s}}), g_1\dots g_s h_1\dots h_{n-s}$ são não nulos em A e G, respectivamente. Pela escolha de m e t temos que $n-s<m\leq t$. Logo podemos avaliar $f(x_1,\dots,x_n)$ nos elementos $b_1\otimes 1,\dots,b_s\otimes 1,a_{i_1}\otimes e_1,\dots,a_{i_{n-s}}\otimes e_{n-s}$ de C e

$$f(b_1\otimes 1,\dots,b_s\otimes 1,a_{i_1}\otimes e_1,\dots,a_{i_{n-s}}\otimes e_{n-s})\neq 0.$$

Portanto f não é identidade de C, que é absurdo. Segue que $\mathcal{V}=\mathrm{var}(C)$. □

3.3 PI-expoente

Seja A uma PI-álgebra sobre um corpo F com $\mathrm{char}(F)=0$ e considere $\{c_n(A)\}_{n\geq 1}$ a sequência de codimensões de A. Lembremos que se A é nilpotente então $c_n(A)=0$ para todo $n\geq N$, onde N é o indice de nilpotência de A. Agora se A não é nilpotente, pelo Teorema de Regev (ver em [16], Teorema 4.2.3), temos que

$$1\leq c_n(A)\leq a^n$$

para alguma constante a. Portanto a sequência de raízes n-ésimas, $\sqrt[n]{c_n(A)}$ para $n\geq 1$ é limitada superiormente. Assim podemos definir o seguinte:

Definição 3.3.1. Seja A uma PI-álgebra, temos que

$$\underline{\exp}(A)=\liminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{c_n(A)}$$

é chamado expoente inferior de A e

$$\overline{\exp}(A)=\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{c_n(A)}$$

é dito expoente superior de A.

Para sequências arbitrárias o limite inferior e superior não são os mesmos. No caso em que sejam iguais, definimos o expoente de A.

Definição 3.3.2. Seja A uma PI-álgebra. O PI-expoente de A é

$$\exp(A)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{c_n(A)}.$$

Definição 3.3.3. Seja $\mathcal{V}$ uma variedade gerada por A, isto é $\mathcal{V}=\mathrm{var}(A)$. Definimos $\exp(\mathcal{V})$ como $\exp(A)$.

Na década de 1980 foi enunciada uma conjectura sobre o comportamento de $c_n(A)$.

Conjectura 3.3.4 (Amitsur)**.** *Para toda PI-álgebra A, $\exp(A)$ existe e é um inteiro.*

A prova desta conjectura para álgebras associativas pode ser encontrada em [13] e [14].

Observação 3.3.5. Se $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ são variedades de álgebras então $\exp(\mathcal{U}) \leq \exp(\mathcal{V})$. De fato, para qualquer variedade de álgebras $\mathcal{V}$ temos que

$$c_n(\mathcal{V}) = \dim_F(P_n/(P_n \cap \mathrm{Id}(\mathcal{V})).$$

Além disso $\mathrm{Id}(\mathcal{V}) \subseteq \mathrm{Id}(\mathcal{U})$, logo $c_n(\mathcal{U}) \leq c_n(\mathcal{V})$. Portanto $\exp(\mathcal{U}) \leq \exp(\mathcal{V})$.

Cabe ressaltar que existem generalizações do PI-expoente dependo da estrutura que está agindo sobre a álgebra. Um exemplo disto é a existência do expoente G-graduado de uma álgebra G-graduada quando $G = \mathbb{Z}_2$ feito por Benanti, Giambruno e Pipitone em [4]

No caso de A afim e G abeliano foi feito por Giambruno e La Mattina em [2]. Além disso também provarom a existência de expoente G-graduado para qualquer álgebra G-graduada com G abeliano em [12]. De maneira geral foi estudado no trabalho de Aljadeff e Giambruno em [1].

Temos que dizer que a existência do expoente G-graduado é um caso particular do estudo feito por Gordienko em [11] e Karasik em [21]. Dentro dos trabalhos de Karasik encontramos o H PI-expoente de uma álgebra de Hopf H semissimples e de dimensão finita, neste caso o expoente volta ser um inteiro positivo. Um exemplo de um expoente não inteiro é dado em [17] quando sobre a álgebra age um semigrupo.

O seguinte teorema nos fornece uma forma de calcular o exponente de uma álgebra de dimensão finita, a prova deste resultado está em [13].

Teorema 3.3.6. *Sejam F um corpo algebricamente fechado e A uma F-álgebra de dimensão finita. Considere $A = A_{ss} \oplus J$, onde A_{ss} é a subálgebra semissimples maximal e J é o radical de Jacobson. Escrevemos $A_{ss} = A_1 \oplus \cdots \oplus A_k$, onde A_i é uma álgebra simples para $i = 1, \ldots, k$. Então $\exp(A)$ é a dimensão máxima da subálgebra semissimples $A_{i_1} \oplus \ldots \oplus A_{i_k}$ tal que*

$$A_{i_1} J \ldots J A_{i_r} \neq 0,$$

onde $A_{i_1}, \ldots, A_{i_r}$ são subálgebras distintas tomadas de $A_i, \ldots, A_k$.

Exemplo 3.3.7. Seja $UT(d_1, \ldots, d_m)$ uma álgebra de matrizes triangulares superiores em blocos sobre o corpo F, lembremos que

$$UT(d_1, \ldots, d_m) = \begin{pmatrix} M_{d_1}(F) & B_{12} & \ldots & B_{1m} \\ 0 & M_{d_2}(F) & \ldots & B_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & M_{d_m}(F) \end{pmatrix}$$

onde os B_{ij} são matrizes retangulares sobre F de tamanhos correspondentes. Logo

$$UT(d_1,\ldots,d_m) \cong M_{d_1}(F)\oplus\cdots\oplus M_{d_m}(F)+J$$

onde $J=\oplus_{ij}B_{ij}$ é o radical de Jacobson. Suponhamos que F é algebricamente fechado, então

$$M_{d_1}(F)B_{12}M_{d_2}(F)B_{23}\cdots B_{m-1,m}M_{d_m}(F)\neq 0,$$

Aplicando o Teorema 3.3.6 temos que

$$\begin{aligned}\exp(UT(d_1,\ldots,d_m)) &= \dim M_{d_1}(F)+\cdots+\dim M_{d_m}(F)\\ &= {d_1}^2+\cdots+{d_m}^2.\end{aligned}$$

Exemplo 3.3.8. Seja G a álgebra de Grassman de dimensão infinita sobre um corpo F com $\mathrm{char}(F)=0$, então $\exp(G)=2$. De fato, pelo Teorema 3.2.9 temos que $c_n(G)=2^{n-1}$ para $n\geq 1$, assim $\exp(G)=\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^{n-1}}=2$.

Agora vamos falar de un resultado que segue do teorema, o qual nos dá uma propiedade para variedades de álgebras com PI-expoente menor ou igual que 1.

Proposição 3.3.9. *Seja $\mathcal{V}$ uma variedade de álgebras associativas sobre um corpo F de característica zero tal que $\exp(\mathcal{V})\leq 1$ então $\mathcal{V}=\mathrm{var}(A)$ onde A é um álgebra de dimensão finita.*

Demonstração. Pelo Exemplo 3.3.8 temos $\exp(G)=2$ onde G é a álgebra de Grassmann de dimensão infinita sobre o corpo F , então $G\notin\mathcal{V}$. Assim pelo Teorema 3.2.13 $\mathcal{V}$ satisfaz uma identidade standard, logo pelo Teorema 3.2.15 temos que $\mathcal{V}$ é gerada por uma álgebra de dimensão finita. □

3.4 Dimensão de Gelfand-Kirillov

Nesta seção introduziremos o conceito de dimensão de Gelfand-Kirillov e falaremos de algumas propriedades. Nossa principal referência é [24].

Seja Φ o conjunto de todas as funções $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ tais que são eventualmente monótonas crescentes e que tomam valores positivos, isto é, existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que $f(n_0)\geq 0$ e $f(n+1)\geq f(n)$ para todo $n\geq n_0$. Definamos a seguinte ordem parcial em Φ: $f\preceq g$ se existem a e p inteiros positivos tal que para todo n suficientemente grande temos que $f(n)\leq ag(pn)$. Assim $\preceq$ induz uma relação de equivelência em Φ:

$$f\sim g \text{ se, e somente se, } f\preceq g \text{ e } g\preceq f.$$

A classe de equivelência de uma função $f\in\phi$, $\mathcal{G}(f)=\{g\in\phi|f\sim g\}$, será chamado o crescimento de f. Além disso, $\preceq$ também induz uma ordem parcial $\leq$ em $\Phi/\sim$.

Observação 3.4.1.

a) Se f e g são funções polinomiais é claro que $f \sim g$ se tem o mesmo grau. Dado um $\gamma \geq 0$ o crescimento da função $p_\gamma : n \mapsto n^\gamma$ é denotado por $\mathcal{P}_\gamma$.

b) Para um número real positivo ϵ, o crescimento da função $q_\epsilon : n \mapsto e^{n^\epsilon}$ é denotado como $\mathcal{E}_\epsilon$. Além disso, $\epsilon < \eta$ se, e somente se, $\mathcal{E}_\epsilon < \mathcal{E}_\eta$.

c) Seja $f(n) = \log(n)$, logo $\mathcal{G}(f) > \mathcal{P}_0$. Mas $\mathcal{G}(f) < \mathcal{P}_\epsilon$ para todo $\epsilon > 0$.

Seja A uma álgebra unitária finitamente gerada sobre o corpo F com conjunto gerador $\{a_1, \ldots, a_m\}$. Logo $V = \langle a_1, \ldots, a_m \rangle$ é um subespaço vetorial gerador de A, no sentido que todo elemento de A é uma combinação linear de monômios formados com elementos $a_1, \ldots, a_m$. Consideremos

$$V^n = \langle a_{i_1} \cdots a_{i_n} | 1 \leq i_1, \ldots, i_t \leq m \rangle$$

Assim $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ onde $A_n = F + V + \cdots + V^n$. Note que se A tem dimensão finita temos que $A = A_n$ para algum n. Definamos $d_V : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dada por

$$d_V(n) = \dim_F A_n.$$

Observemos que $d_V \in \Phi$, logo é possivel encontrar $\mathcal{G}(d_V)$.

Lema 3.4.2. *Seja A uma álgebra finitamente gerada sobre o corpo F. Considere V e W dois subespaçcos geradores de A, logo $\mathcal{G}(d_V) = \mathcal{G}(d_W)$.*

Demonstração. Dado que

$$A = \bigcup_{n=0}^{\infty} (V^0 + \cdots + V^n) = \bigcup_{n=0}^{\infty} (W^0 + \cdots + W^n).$$

Logo existem inteiros positivos s e t tais que

$$W \subseteq \sum_{i=0}^{s} V^i \text{ e } V \subseteq \sum_{j=0}^{t} W^j.$$

Portanto $d_W(n) \leq d_V(sn)$ e $d_V(n) \leq d_W(tn)$, segue que $d_V \sim d_w$ e daí $\mathcal{G}(d_V) = \mathcal{G}(d_W)$. $\square$

O lema anterior nos permite dar a seguinte definição:

Definição 3.4.3. Seja A uma álgebra finitamente gerada sobre o corpo F e V um subespaço gerador de A, então

$$\mathcal{G}(A) := \mathcal{G}(d_V)$$

é chamado o crescimento de A. Além disso, diremos que:

a) A tem crescimento polinomial se $\mathcal{G}(A) = \mathcal{P}_m$ para algum $m \in \mathcal{N}$.

b) A tem crescimento exponencial se $\mathcal{G} = \mathcal{E}_1$.

c) A tem crescimento subexponencial se $\mathcal{G}(A) < \mathcal{E}_1$, ainda que $\mathcal{G}(A) \nleq \mathcal{P}_m$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

Notemos que $\mathcal{G}(A) \nleq \mathcal{P}_0$ se, e somente se, A tem dimensão finita. Logo $\mathcal{P}_0$ é o menor crescimento que uma álgebra pode ter.

Agora daremos um exemplo de uma álgebra com crescimento exponencial.

Exemplo 3.4.4. Seja $A = F\langle x, y\rangle$ a álgebra livre de posto 2. Logo $V = \langle x, y\rangle$ é um subespaço gerador de A e

$$d_V(n) = \dim_k\left(\sum_{i=0}^{n} V^i\right) = 1 + 2 + 2^2 + \cdots 2^n = 2^{n+1} - 1.$$

Segue que $\mathcal{G}(A) = \mathcal{E}_1$.

Na próxima proposição provamos que o crescimento exponencial é o maior crescimento que pode ter uma algebra finitamente gerada.

Proposição 3.4.5. *Se A é uma álgebra finitamente gerada sobre o corpo F, mas não é de dimensão finita então*

$$\mathcal{P}_1 \leq \mathcal{G}(A) \leq \mathcal{E}_1.$$

Demonstração. Seja V o subespaço gerador de A e assumamos que $1 \in V$. Logo

$$d_V(n) = \dim(V^n) \leq \dim(V \otimes \cdots \otimes V) = (\dim V)^n,$$

assim $\mathcal{G}(A) = \mathcal{G}(d_V) \leq \mathcal{E}_1$. Note que as inclusões na sequência $V^0 \subseteq V^1 \ldots$ são próprias, pois se $V^n = V^{n+1}$ para algun n, então A é de dimensão finita. Assim $d_V(n) \geq n$ para todo n, portanto $\mathcal{G}(A) \geq \mathcal{P}_1$. □

Em muitas ocasiões o crescimento de uma álgebra é dificil de se determinar explicitamente, por esta razão se estuda o crescimento através do comportamento assintótico de funções monótonas crescentes.

Definição 3.4.6. Seja A uma álgebra associativa com unidade e finitamente gerada sobre o corpo F. Considere V um subespaço gerador de A, logo a dimensão de Gelfand-Kirillov de A é definida como

$$\mathrm{GKdim}(A) = \limsup_{n\to\infty}(\log_n d_V(n)) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log d_V(n)}{\log n}.$$

Note que do Lema 3.4.2 segue que $\mathrm{GKdim}(A)$ é idependente da escolha de V. Agora vamos enunciar alguns resultado sobre a dimensão de Gelfand-Kirillov, a provas destes podem ser encontradas em [24].

Proposição 3.4.7. *Seja A uma álgebra finitamente gerada sobre o corpo F, então*

1) Se B é uma subálgebra de A ou é imagem homomorfa de A, temos $\mathrm{GKdim}(B) \leq \mathrm{GKdim}(A)$*.*

2) $\mathrm{GKdim}(A) = 0$ *se, e somente se, A é de dimensão finita. Em outro caso*

$$\mathrm{GKdim}(A) = 1 \text{ ou } \mathrm{GKdim}(A) \geq 2.$$

Notemos que se $\mathrm{GKdim}(A) = r < \infty$ então a sequência $\{d_V(n)\}_{n\geq 1}$ tem comportamento assintótico como um polinômio de grau r. Agora daremos alguns exemplos:

Exemplo 3.4.8. Seja $A = F[x_1, \ldots, x_k]$ a álgebra dos polinômio comutativos nas variáveis $x_1, \ldots x_k$ sobre o corpo F. Notemos que o número dos monômios de grau $\leq n$ em k variáveis é igual ao número dos monômios de grau n em $k+1$. Assim

$$d_V(n) = \binom{n+k}{n}$$

onde V é o subespaço vetorial gerado por $\{x_1, \ldots, x_k\}$. Logo $d_V(n)$ é um polinômio em n de grau k, assím $\mathrm{GKdim}(F[x_1, \ldots, x_k]) = k$.

Exemplo 3.4.9. Seja $k > 1$ e considere $F\langle x_1, ..., x_k\rangle$ a álgebra livre de posto k sobre F. Note que $\dim A_n = \sum_{i=0}^{n} k^i$, logo o crescimento de A é exponencial, portanto $\mathrm{GKdim}(A) = \infty$.

Dada uma álgebra A de dimensão finita sobre um corpo infinito F, pelo exemplo 3.4.8 podemos obter informação sobre a dimensão de Gelfand-Kirillov de qualquer álgebra relativamente livre de posto finito da variedade $\mathrm{var}(A)$.

Lembremos que $F[\xi_j{}^{(i)} | i \geq 1, 1 \leq j \leq m]$ é o anel dos polinômios sobre F nas indeterminadas $\xi_j{}^{(i)}$. Agora consideremos a álgebra $B = A \otimes F[\xi_j{}^{(i)}]$ e $\{u_1, \ldots, u_m\}$ uma base de A, logo os elementos

$$\xi^{(i)} = \sum_{j=1}^{m} u_j \otimes \xi_j{}^{(i)}$$

são chamados elementos genéricos e a álgebra gerada por estes elementos, $F\{\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots\}$, é a álgebra relativamente livre de posto enumerável da variedade $\mathrm{var}(A)$ (ver Teorema 1.5.4).

Denotemos por $F_k\{\xi\} = F\{\xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(k)}\}$ a subálgebra gerada por $\xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(k)}$. Note que $F_k\{\xi\}$ é álgebra relativamente livre de posto k da variedade $\mathrm{var}(A)$.

Proposição 3.4.10. *Seja A uma álgebra de dimensão finita sobre o corpo F e $F_k\{\xi\}$ a álgebra relativamente livre de posto k da variedade* $\mathrm{var}(A)$*. Se* $\dim A = m$*, então o número de monômios linearmente independentes em $\xi^1, \ldots, \xi^k$ no grau máximo n é menor ou igual a $m(n+k)^{km}$. Em particular,* $\mathrm{GKdim}\, F_k\{\xi\} \leq km$*.*

Demonstração. Note que qualquer monômio nos elementos genéricos $\xi^{(i)} = \sum_{j=1}^{m} u_j \otimes {\xi_j}^{(i)}$ no grau máximo n, com $1 \leq i \leq k$, está em

$$A \otimes F[{\xi_j}^{(i)}]_n$$

onde $F[{\xi_j}^{(i)}]_n$ é subespaço de todos os polinômios no elementos ${\xi_j}^{(i)}$ de grau total no máximo n com $1 \leq i \leq k$ e $1 \leq j \leq m$. Logo, pelo Exemplo 3.4.8, temos que

$$\dim F[{\xi_j}^{(i)}]_n = \binom{km+n}{km} = \binom{km+n}{n} \leq (n+k)^{km}.$$

Segue que $\dim A \otimes F[{\xi_j}^{(i)}]_n \leq m(n+k)^{km}$ e daí $\mathrm{GKdim}(F[{\xi_j}^{(i)}]_n) \leq km$. □

Teorema 3.4.11. *Se A é uma PI-álgebra finitamente gerada sobre um corpo infinito F, então* $\mathrm{GKdim}(A) < \infty$*.*

Demonstração. Dado que A satisfaz todas as identidades de $M_k(F)$ para algum $k \geq 1$, ver [16]. Suponhamos que A é gerada por m elementos, logo A é imagem homomorfa da álgebra relativamente livre de posto m da variedade $\mathrm{var}(M_k(F))$. Assim pela, Proposição 3.4.7 temos que

$$\mathrm{GKdim}(A) \leq \mathrm{GKdim}(F\langle x_1, \ldots x_k\rangle / (F\langle x_1, \ldots x_k\rangle \cap \mathrm{Id}(M_k(F)).$$

Mas pela proposição anterior $\mathrm{GKdim}(F\langle x_1, \ldots x_k\rangle / (F\langle x_1, \ldots x_k\rangle \cap \mathrm{Id}(M_k(F))) < \infty$. □

Quando A é uma PI-álgebra, é comum falar da dimensão de Gelfand-Kirillov em k variáveis:

Definição 3.4.12. Seja A uma PI-álgebra sobre o corpo F, definimos a dimensão de Gelfand-Kirillov de A em k variáveis como

$$\mathrm{GKdim}_k(A) := \mathrm{GKdim}(R_k(A))$$

onde $R_k(A) = F\langle x_1, \ldots x_k\rangle / (F\langle x_1, \ldots x_k\rangle \cap \mathrm{Id}(A))$.

Agora vamos enunciar um teorema que nos permite calcular a dimensão de Gelfand-Kirillov de uma PI-álgebra em k variáveis em termos das dimensões de Gelfand-Kirillov de outras PI-álgebras no mesmo número de variáveis, se o T-ideal da álgebra inicial é o produto dos T-ideais das demais. A prova detalhada deste resultado pode ser encontrada em [8].

Teorema 3.4.13. *Sejam* A, A_1, A_2 *PI-álgebras tal que* $\mathrm{Id}(A) = \mathrm{Id}(A_1)\,\mathrm{Id}(A_2)$, *então*

$$\mathrm{GKdim}(R_k(A)) = \mathrm{GKdim}(R_k(A_1)) + \mathrm{GKdim}(R_k(A_2)).$$

Demonstração. Seja $H_k(A)$ a serie de Hilbert na variável t da PI-álgebra A, logo pelo Teorema 2.2.45

$$H_k(A) = H_k(A_1) + H_k(A_2) + (kt-1)H_k(A_1)H_k(A_2)$$

Se $R_k(A) = \bigoplus_{n\geq 0} V^{(n)}$, $R_k(A_1) = \bigoplus_{n\geq 0} V'^{(n)}$ e $R_k(A_2) = \bigoplus_{n\geq 0} V''^{(n)}$. Então

$$H_k(A) = \sum_{n\geq 0} a'_n t^n + \sum_{n\geq 0} a''_n t^n + (tk-1)\left(\sum_{n\geq 0} a'_n t^n\right)\left(\sum_{n\geq 0} a''_n t^n\right),$$

onde $a'_n = \dim V'^{(n)}$, $a''_n = \dim V''^{(n)}$. Assim

$$d_V(n) = \sum_{m\leq n}(a'_m + a''_m) + \sum_{m\leq n}\left(\sum_{s+l=m-1} k a'_s a''_l - \sum_{s+l=m} a'_s a''_l\right).$$

Analisemos agora o limite $\lim\limits_{n\to\infty} \log_n d_V(n)$. Note que $\{a'_n\}_{n\geq 0}$ e $\{a''_n\}_{n\geq 0}$ são sequência crescentes e positivas, assim

$$\begin{aligned}
\mathrm{GKdim}(R_k(A)) = \lim_{n\to\infty} \log_n d_V(n) &= \lim_{n\to\infty} \log_n \left(\sum_{m\leq n}\left(\sum_{s+l=m-1} k a'_s a''_l - \sum_{s+l=m} a'_s a''_l\right)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \log_n \left((k-1)\left(\sum_n a'_n\right)\left(\sum_n a''_n\right)\right) \\
&= \mathrm{GKdim}(R_k(A_1)) + \mathrm{GKdim}(R_k(A_2)).
\end{aligned}$$

□

4 Variedades Minimais de Álgebras

Dado que a conjetura de Amitsur foi provada para álgebras associativas, o próximo passo é estudar as variedades de álgebras associativas dado um expoente fixo. Neste capítulo mostraremos a caracterização das variedades minimais de posto básico finito e de seus T-ideais feita por Giambruno e Zaicev em [15]. Também falaremos da relação entre a dimensão de Gelfand-Kirillov e o PI-expoente das álgebras relativamente livres de posto finito de uma variedade de álgebras associativas não nilpotente.

4.1 Variedades Minimais de Expoente Fixo

Nesta seção daremos uma caracterização das variedades de álgebras associativas minimais de posto básico finito dado um expoente fixo. Além disso, provaremos que o número destas variedades é finito. De agora em diante consideraremos apenas variedades de álgebras associativas.

Definição 4.1.1. Considere a variedade $\mathcal{V} = \mathrm{var}(A)$ onde A é uma PI-álgebra. Se A é finitamente gerada, dizemos que $\mathcal{V}$ é uma variedade de posto básico finito.

Definição 4.1.2. Uma variedade $\mathcal{V}$ de expoente d é chamada minimal se toda subvariedade própria tem expoente estritamente menor que d.

O seguinte lema nos permite garantir que dada uma álgebra de dimensão finita cuja decomposição de Wedderburn satisfaz algumas condições, existe uma subálgebra isomorfa a uma álgebra de matrizes triangulares por blocos.

Lema 4.1.3. *Seja A uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo F algebricamente fechado de característica zero. Seja $A = B + J$ sua decomposição onde, B é uma álgebra semissimples maximal e J seu radical de Jacobson. Escrevemos $B = B_1 \oplus \cdots \oplus B_t$, onde $B_i \cong M_{d_i}(F)$ são álgebras simples. Se para algum $m \leq t$, $B_1 u_1 B_2 u_2 \cdots u_{m-1} B_{m-1} \neq 0$ onde $u_1, \ldots, u_{m-1} \in J$, então A contém uma subálgebra isomorfa a $UT(d_1, \ldots, d_m)$.*

Demonstração. Primeiro vamos considerar $B_1 \oplus \ldots \oplus B_m$ como uma subálgebra de $M_q(F)$ de matrizes diagonais por blocos onde $q = d_1 + \cdots + d_k$. Se consideramos

$$q_0 = 0,\, q_1 = d_1, \ldots, q_k = d_1 + \cdots + d_k, \ldots q_m = d_1 + \cdots + d_m = q,$$

então B_j é gerado pelas matrizes $e_{\alpha\beta}$ com $q_{j-1} + 1 \leq \alpha,\, \beta \leq q_j$, $j = 1, \ldots, m$. Pela hipótese existe $u_i \in J$ e $e_{\alpha_i\beta_i} \in B_i$ tais que

$$e_{\alpha_1\beta_1} u_1 e_{\alpha_2\beta_2} u_2 \cdots u_{m-1} e_{\alpha_m\beta_m} \neq 0 \tag{4.1}$$

e $q_{i-1}+1 \leq \alpha_i, \beta_i \leq q_i$ com $i = 1, \ldots, m$.

Para provar o resultado, vamos definir elementos x_{ij} na álgebra gerada por $B_1, \ldots, B_m$, $u_1 \ldots u_{m-1}$ e provaremos que eles são uma base de uma subálgebra C de A que é isomorfa a $UT(d_1, \ldots, d_m)$.

Se $q_{k-1}+1 \leq i, j \leq q_k$ para algum $1 \leq k \leq m$, logo definimos $x_{ij} = e_{ij} \in B_k$. Agora seja $1 \leq i < j \leq q$ e

$$q_{k-1}+1 \leq i \leq q_k, \quad q_{k+s-1}+1 \leq j \leq q_{k+s}$$

onde $1 \leq k \leq m$, $s \geq 1$ e $k+s \geq m$. Logo definimos

$$x_{ij} = e_{i\alpha_k} e_{\alpha_k \beta_k} u_k e_{\alpha_{k+1}\beta_{k+1}} u_{k+1} \cdots u_{k+s-1} e_{\alpha_{k+s}\beta_{k+s}} e_{\beta_{k+s} j}.$$

Por 4.1 temos que $e_{\alpha_k i} x_{ij} e_{j \beta_{k+s}} \neq 0$, portanto

$$x_{ij} \neq 0. \tag{4.2}$$

Dado que $e_{ij}e_{jk} = e_{ik}$ e $e_{ij}e_{tk} = 0$ se $j \neq t$, concluímos o seguinte

$$x_{ij}x_{tk} = \begin{cases} x_{ik} & se \quad j = t \\ \\ 0 & se \quad j \neq t \end{cases} \tag{4.3}$$

Agora provemos que os elementos x_{ij} são linearmente independentes. Se

$$\sum \lambda_{ij} x_{ij} = 0,$$

fixando i_0, j_0, pela igualdade 4.3, temos

$$0 = e_{i_0 i_0} (\sum \lambda_{ij} x_{ij}) e_{j_0 j_0} = x_{i_0 i_0} (\sum \lambda_{ij} x_{ij}) x_{j_0 j_0} = \lambda_{i_0 j_0} x_{i_0 j_0}.$$

Assim, por 4.2 segue que $\lambda_{i_0 j_0} = 0$.

De novo por 4.3 o espaço vetorial C gerado por $\{x_{ij}\}_{ij}$ é uma subálgebra de A. Como o conjunto $\{x_{ij}\}_{ij}$ satisfaz 4.2 e 4.3 temos que a função $\varphi : C \mapsto UT(d_1, \ldots, d_m)$ dada por

$$\varphi\left(\sum a_{ij} x_{ij}\right) = \sum a_{ij} e_{ij}$$

é um isomorfismo de álgebras. $\square$

Agora com a ajuda do Lema 4.1.3 e o Teorema 3.3.6, vamos provar que toda PI-álgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado tem uma subálgebra isomorfa a uma álgebra de matrizes triangulares em blocos.

Lema 4.1.4. *Seja F um corpo algebricamente fechado de característica zero e A uma álgebra de dimensão finita sobre F com $\exp(A) = d \geq 2$. Logo existe uma subálgebra de A isomorfa a $UT(d_1, \ldots, d_m)$ e $d_1^2 + \cdots + d_m^2 = d$.*

Demonstração. Pelo Teorema 1.1.23, temos que A tem a seguinte decomposição

$$A = B + J$$

onde B é uma álgebra semissimples maximal e J seu radical de Jacobson. Como F é algebricamente fechado $B = B_1 \oplus \cdots \oplus B_t$, onde $B_i \cong M_{d_i}(F)$ para $i = 1, \ldots, m$. Como $\exp(A) \geq 2$, pelo Teorema 3.3.6 existe $m \leq t$ tal que $d = \sum_{j=1}^{m} \dim B_j$ e

$$B_1 J B_2 J \cdots J B_m \neq 0. \tag{4.4}$$

Logo por 4.4 existem $w_1, \ldots, w_{m-1} \in J$ tal que

$$B_1 w_1 B_2 J \cdots w_{m-1} B_m \neq 0.$$

Assim utilizando o lema anterior temos o resultado. □

Observação 4.1.5. Considere $A = UT(d_1, \ldots, d_m)$ e $B = UT(q_1, \ldots, q_s)$ duas álgebras de matrizes triangulares superiores em blocos sobre F. Sejam $q = q_1 + \cdots + q_s$ e $d = d_1 + \cdots + d_m$ e suponhamos que $q \leq d$. Assim podemos considerar os mergulhos canônicos de A e B no canto superior esquerdo de $M_d(F)$.

Neste caso diremos que B é uma subálgebra de A se, e somente se, para qualquer $j \in \{1, \ldots, m\}$, existe $i \in \{1, \ldots, s\}$ tal que $q_1 + \cdots + q_i = d_1 + \cdots + d_j$.

Lema 4.1.6. *Sejam $A = UT(d_1, \ldots, d_m)$ e $B = UT(q_1, \ldots, q_s)$ duas álgebras de matrizes triangulares superiores em blocos sobre F. Logo $B \in \mathrm{var}(A)$ se, e somente se, $B \subseteq A$.*

Demonstração. Suponhamos que B satisfaz todas as identidades de A. Sejam $q = q_1 + \cdots + q_s$ e $d = d_1 + \cdots + d_m$. Logo $A \subseteq M_d(F)$ e pelo Teorema de Amitsur-Levitzki ,1.6.7, A satisfaz a identidade standard

$$\mathrm{St}_{2d}(x_1, \ldots, x_{2d}) = \sum_{\sigma \in S_{2d}} (\operatorname{sgn} \sigma) x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(2d)} \equiv 0.$$

Por outro lado, B contém a subálgebra $C = UT(1, \ldots, 1)$ de matrizes triangulares superiores de tamanho $q \times q$. Pelo Exemplo 1.3.7 temos que todas as identidades de C segue da identidade

$$[x_1, x_2] \cdots [x_{2q-1}, x_{2q}] \equiv 0,$$

logo C não satisfaz identidades de grau menor que $2q$, assim $q \leq d$.

Consideremos os mergulhos canônicos de A e B em $M_d(F)$. Assumamos que B não é uma subálgebra de A, isto é, existe um par (i, j) tal que

$$q_1 + \cdots + q_i < t \text{ e } q_1 + \cdots + q_{i+1} > t, \tag{4.5}$$

onde $t = d_1 + \cdots + d_j < d$. Logo $A = UT(d_1, \ldots, d_m) \subseteq UT(t, d-t)$.

Notemos que $\mathrm{Id}(M_t(F))\,\mathrm{Id}\,M_{d-t}(F) \subseteq \mathrm{Id}(UT(t, d-t))$. De fato, sejam $f \in \mathrm{Id}(M_t(F))$, $g \in \mathrm{Id}(M_{d-t}(F))$ e considere $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m \in UT(t, d-t)$, então

$$\begin{aligned} f(x_1, \ldots, x_n)g(y_1, \ldots, y_m) &= \begin{pmatrix} f(a_1, \ldots, a_n) & * \\ 0 & f(b_1, \ldots b_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_m) & * \\ 0 & g(\tilde{b}_1, \ldots \tilde{b}_m) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & f(b_1, \ldots b_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_m) & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

onde $a_1, \ldots, a_n, \tilde{a}_1, \ldots \tilde{a}_m \in M_d(F)$ e $b_1, \ldots, b_n, \tilde{b}_1, \ldots \tilde{b}_m \in M_{d-t}(F)$. Assim A satisfaz a identidade

$$\mathrm{St}_{2t}(x_1, \ldots, x_{2t})\,\mathrm{St}_{2(d-t)}(y_1, \ldots, y_{2t}) \equiv 0. \tag{4.6}$$

De 4.5 segue que a matriz $e_{t+1,t} \in B$. Lembre que

$$e_{ij}e_{tk} = \begin{cases} e_{ik} & se \quad j = t \\ \\ 0 & se \quad j \neq t \end{cases}$$

Assim

$$\begin{aligned} &\mathrm{St}_{2t}(e_{11}, e_{12}, e_{22}, \ldots, e_{t-1,t-1}, e_{t-1,t}, e_{t,t+1}, e_{t+1,t}, e_{t+1,t}) \\ &\quad = e_{11}e_{12}e_{22} \cdots e_{t-1,t-1}e_{t-1,t}e_{t,t+1}e_{t+1,t}e_{t+1,t} = e_{1t} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \mathrm{St}_{2(t-d)}(e_{t,t+1}, e_{t+1,t+1}, e_{22}, \ldots, e_{d-1,d}, e_{dd}) &= e_{t,t+1}e_{t+1,t+1}e_{22} \cdots e_{d-1,d}e_{dd} \\ &= e_{td}. \end{aligned}$$

Segue que B não satisfaz 4.6, o que é absurdo. Portanto B é uma subálgebra de A.

Agora suponhamos que $B \subseteq A$, logo $\mathrm{Id}(A) \subseteq \mathrm{Id}(B)$. Assim $B \in \mathrm{var}\,A$. □

O lema anterior nos permite concluir o seguinte resultado:

Corolário 4.1.7. *Se* $(d_1, \ldots, d_m)$ *e* $(q_1, \ldots, q_s)$ *são duas sequências distintas de inteiros positivos, logo* $\mathrm{var}(UT(d_1, \ldots, d_m)) \neq \mathrm{var}(UT(q_1, \ldots, q_s))$.

Demonstração. Note que se $(d_1, \ldots, d_m) \neq (q_1, \ldots, q_s)$, então $UT(d_1, \ldots, d_m)$ e $UT(d_1, \ldots, d_m)$ são álgebras distintas, logo pelo Lema 4.1.6 estas álgebras geram variedades distintas. $\square$

Na continuação com ajuda dos lemas anteriores e alguns resultados do capítulo dois vamos provar que toda variedade de posto básico finito contém uma subalgebra de matrizes triangulares superiores em blocos.

Proposição 4.1.8. *Se $\mathcal{V}$ é uma variedade de posto básico finito e* $\exp(\mathcal{V}) = d \geq 2$, *então existe uma álgebra de matrizes triangulares superiores em blocos $UT(d_1, \ldots, d_m) \in \mathcal{V}$ com $d_1^2 + \cdots + d_m^2 = d$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{V}$ uma variedade de posto básico finito com $\exp(\mathcal{V}) = d \geq 2$, pelo Teorema 3.2.12 temos que existe uma álgebra A de dimensão finita tal que $\mathcal{V} = \mathrm{var}(A)$ e $\exp(A) = d$.

Seja $\overline{F}$ o fecho algébrico de F e considere $\overline{A} = A \otimes_F \overline{F}$, lembremos que pelo Teorema 3.1.5 $c_n(A)$ e $c_n^{\overline{F}}(\overline{A})$ são iguais. Assim, pelo Lema 4.1.4 temos que $\overline{A}$ contém uma subálgebra $UT(d_1, \ldots, d_m)$ tal que ${d_1}^2 + \cdots + {d_m}^2 = d$.

Pelo Lema 1.5.2, $\overline{A}$ vista como F-álgebra satisfaz as mesmas identidades de A, logo $\overline{A} \in \mathcal{V}$ e daí $UT(d_1, \ldots, d_m) \in \mathcal{V}$.

$\square$

O seguinte teorema nos fornece uma caracterização das variedade minimais de posto básico finito.

Teorema 4.1.9. *Sejam F um corpo de característica zero e $\mathcal{V}$ uma variedade de posto básico finito com* $\mathrm{var}(\mathcal{V}) = d \geq 2$. *Logo $\mathcal{V}$ é uma variedade minimal de expoente d se, e somente se, $\mathcal{V}$ é gerada por uma álgebra de matrizes triangulares superiores em blocos $UT(d_1, \ldots, d_m) \in \mathcal{V}$ com $d_1^2 + \cdots + d_m^2 = d$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{V}$ uma variedade de posto básico finito de expoente $d \geq 2$. Da proposição anterior temos que $\mathcal{V}$ contém uma subálgebra de matrizes triangulares superiores em blocos, $UT(d_1, \ldots, d_m)$, com o mesmo expoente.

Agora vamos provar que $\mathrm{var}(UT(d_1, \ldots, d_m))$ é uma variedade minimal com expoente d. Suponhamos por contradição que existe $\mathcal{U}$ subvariedade própria de $\mathrm{var}(UT(d_1, \ldots, d_m))$ com expoente d.

Como $\mathcal{V}$ satisfaz uma identidade standard pois $\mathcal{V} = \mathrm{var}(A)$, onde A é uma álgebra de dimensão finita e $\mathrm{Id}(\mathcal{V}) \subseteq \mathrm{Id}(\mathcal{U})$, segue pelo Teorema 3.2.15 que $\mathcal{U} = \mathrm{var}(B)$ para alguma álgebra B de dimensão finita.

Utilizando de novo a Proposição 4.1.8, existe $UT(q_1, \ldots, q_s) \in \mathcal{U}$ tal que ${q_1}^2 + \cdots + {q_s}^2 = d$. Pelo Lema 4.1.6 existem $i_1, \ldots, i_{m-1}$ tais que

$$q_1 + \cdots + q_{i_1} = d_1,\ q_{i_1+1} + \cdots + q_{1_2} = d_2, \ldots,\ q_{i_{m-1}+1} + \cdots + q_s = d_m$$

mas ${q_1}^2 + \cdots + {q_s}^2 = {d_1}^2 + \cdots + {d_m}^2 = d$, logo $s = m$ e $q_i = d_i$ para $1 \leq i \leq m$.

Portanto $\mathcal{U} = \mathrm{var}(UT(d_1, \ldots, d_m))$. □

Corolário 4.1.10. *Para qualquer inteiro positivo k existe uma variedade $\mathcal{V}$ tal que $\exp(\mathcal{V}) = d$ mas $\exp(\mathcal{U}) \leq d - k$ para qualquer subvariedade própria $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$.*

Demonstração. Consideremos $\mathcal{V} = \mathrm{var}(M_m(F))$ e $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ uma subvariedade própria com $\exp(\mathcal{U}) = e \leq d = m^2$. Logo pela Proposição 4.1.8 temos que existe $UT(q_1, \ldots, q_s) \in \mathcal{U}$ tal que ${q_1}^2 + \cdots + {q_s}^2 = e$.

Pelo Lema 4.1.6 temos que $q_1 + \cdots + q_s \leq m$. Dado que $\mathcal{U}$ é própria, segue que $s > 1$ ou $q_1 < m$. Portanto $\exp(\mathcal{U}) = e = {q_1}^2 + \cdots + {q_s}^2 \leq (m-1)^2 + 1 = m^2 - 2m + 2$. Assim tomando m suficientemente grande, temos o resultado requerido. □

Corolário 4.1.11. *O número de variedades minimais de álgebras de posto básico finito dado um expoente $d \geq 2$ é finito.*

Demonstração. Dado um número inteiro positivo $d \geq 2$, existem inteiros positivos tais que a soma destes ao quadrado é d, entretanto estes inteiros não necessariamente são únicos, isto é, podem existir arranjos distintos de inteiros positivos cuja soma dos quadrados seja d. Vale observar que estes arranjos podem ter cardinalidades distintas e a quantidade de arranjos é finita. Logo pelo Corolário 4.1.7 e pelo Teorema 4.1.9 segue o resultado.

□

4.2 T-ideais de Matrizes Triangulares em Blocos

Na seção anterior provamos que toda variedade minimal de posto básico finito é gerada por uma álgebra de matrizes triangulares superiores em blocos. Agora estudaremos os T-ideais associados a este tipo de álgebras. Provaremos que tais T-ideais são produtos de um número finito de T-ideais de álgebras de matrizes sobre o corpo F.

Definição 4.2.1. Seja L um subespaço da álgebra A. Se $[L, A] \subseteq A$, onde $[L, A]$ denota o subgrupo aditivo gerado pelos comutadores de Lie, $[l, a]$ com $l \in L$ e $a \in A$, dizemos que L é um ideal de Lie.

Lema 4.2.2. *Seja $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in F\langle X\rangle$ um polinômio e seja A uma álgebra associativa sobre um corpo F com $\mathrm{char}\, F = 0$. Se $f(A)$ denota o subespaço vetorial gerado por todos os valores $f(a_1, \ldots, a_n)$, $a_1, \ldots a_n \in A$, logo $f(A)$ é um ideal de Lie de A.*

Demonstração. Primeiro vamos provar o lema com $A = F\langle X \rangle$ e neste caso denotamos $f(A) = \langle f \rangle$. Note que é suficiente provar que $[f(x_1, \ldots, x_n), x_{n+1}] \in \langle f \rangle$.

Seja $\sum a_\alpha f_\alpha$ a decomposição de f em suas componentes multi-homogêneas f_α com $a_\alpha \in F$. Logo pelo mesmo argumento de Vandermonde utilizado no Teorema 1.4.3, mas aplicado a $A/\langle f \rangle$ temos que $f_\alpha \in \langle f \rangle$. Assim é suficiente provar o lema para polinômios multi-homogêneos f.

Sejam $n_j = \deg_{x_j} f$ para todo $j = 1, \ldots n$ e $g = f(x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \in \langle f \rangle$ onde $y_1, \ldots, y_n \in X$. Consideremos a componente multi-homogênea $g_i = g(x_1, \ldots, x_n, y_i)$ de g de multigrau $(m_1, \ldots, m_{i-1}, m_i - 1, m_{i+1}, \ldots, m_n)$ em $x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n$ e de multigrau $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ em $y_1, \ldots, y_i, \ldots, y_n$, de maneira análoga ao caso anterior $g_i \in \langle f \rangle$. Agora, dado que $\mathrm{ad}(x_{n+1}) : a \mapsto [a, x_{n+1}]$ é uma derivação de $F\langle X \rangle$ e

$$[x_{i_1} \ldots x_{i_k}, x_{n+1}] = \sum_{j=1}^{k} x_{i_1} \ldots x_{i_{j-1}} [x_{i_j}, x_{n+1}] x_{i_{j+1}} \ldots x_{i_k}.$$

Temos que $[f(x_1, \ldots, x_n), x_{n+1}] = \sum_i g_i(x_1, \ldots, x_n, [x_i, x_{n+1}]) \in \langle f \rangle$, assim $\langle f \rangle$ é um ideal de Lie.

Agora provemos que $[f(x_1, \ldots, x_n), b] \in f(A)$. Lembremos que

$$[f(x_1, \ldots, x_n), x_{n+1}] = \sum_i \alpha_i f(y_1^{(i)}, \ldots, y_n^{(i)}),$$

onde $\alpha_i \in F$ e $y_1^{(i)}, \ldots, y_n^{(i)} \in F\langle X \rangle$. Aplicando a igualdade anterior ao homomorfismo $\phi : F\langle X \rangle \to A$ onde $\phi(x_1) = a_1, \ldots, \phi(x_n) = a_n, \phi(x_{n+1}) = b$, temos que

$$[f(a_1, \ldots, a_n), b] = \sum_i \alpha_i f(a_1^{(i)}, \ldots, a_n^{(i)}) \in f(A).$$

□

Observação 4.2.3. Seja I um T-ideal de $F\langle X \rangle$, logo $I = \mathrm{Id}(\mathcal{V})$ para alguma variedade de álgebras. Denotamos por $R(I) = R(\mathcal{V})$ a álgebra relativamente livre de posto enumerável da variedade $\mathcal{V}$.

Ao começo desta seção falamos que iríamos provar que o T-ideal de uma álgebra de matrizes triangulares superiores em blocos é produto de um número finito de T-ideais de álgebras de matrizes. Para isto o seguinte lema é fundamental, o qual será provado com ajuda do Corolário 1.7.10.

Lema 4.2.4. *O produto tensorial $UT(d_1, \ldots, dm) \otimes F[t_1, t_2, \ldots]$ contém uma subálgebra isomorfa a $R(I)$ onde*

$$I = Id(M_{d_1}(F)) \cdots Id(M_{d_m}(F)).$$

Demonstração. Seja A uma F-álgebra de dimensão finita com base $e_1, \ldots, e_n$ e consideremos $T = \{\xi_{ij}{}^{(t)} | i, j, t \geq 1\}$ o conjunto das variáveis comutativas. Considere $R(\mathrm{var}(A))$ a álgebra relativamente livre de posto enumerável da variedade $\mathrm{var}(A)$, pelo Teorema 1.5.4 é isomorfa a uma subálgebra $\tilde{A}$ de $A \otimes F[T]$, a qual é gerada pelos elementos

$$\xi^{(i)} = \sum_{j=1}^{m} u_j \otimes \xi_j{}^{(i)}$$

para $i = 1, 2, \ldots$.

Vamos provar este lema por indução sobre m.

Se $m = 1$, o resultado segue do Corolário 1.5.6.

Suponhamos $m > 1$. Consideremos $A = UT(d_1, \ldots, d_{m-1})$, $B = M_{d_m}(F)$, $r = d_1 + \ldots + d_{m-1}$ e $s = d_m$. Pela indução $A \otimes F[t_1, t_2, \ldots]$ contém uma subálgebra isomorfa a uma álgebra relativamente livre com T-ideal

$$I = \mathrm{Id}(M_{d_1}(F)) \cdots \mathrm{Id}(M_{d_{m-1}}(F)).$$

Portanto $\mathrm{Id}(A) = \mathrm{Id}(M_{d_1}(F)) \cdots \mathrm{Id}(M_{d_{m-1}}(F))$. Agora precisamos provar que

$$\mathrm{Id}(UT(d_1, \ldots, d_m)) = \mathrm{Id}(A)\,\mathrm{Id}(B).$$

Agora vamos decompor $\{\xi_{ij}^{(t)} | i, j, t \geq 1\}$ em três conjuntos disjuntos: $P = \{\rho_{ij}^{(t)} | i, j, t \geq 1\}$, $U = \{\mu_{ij}^{(t)} | i, j, t \geq 1\}$ e $V = \{\nu_{ij}^{(t)} | i, j, t \geq 1\}$.

Consideremos os mergulhos canônicos de A e B em $M_{r+s}(F)$, isto é,

$$A = \begin{pmatrix} M_{d_1}(F) & \ldots & * & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & M_{d_{m-1}}(F) & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & M_{d_m}(F) \end{pmatrix}.$$

Assim $B = \langle e_{ij} | r + 1 \leq i, j \leq r + s \rangle$ e A é o gerado linear de algumas matrizes e_{ij} com $1 \leq i, j \leq r$.

Para $t = 1, 2, \ldots$ definamos os seguintes elementos

$$a_t = \sum_{i,j} \rho_{ij}^{(t)} e_{ij} \text{ onde } e_{ij} \in A$$
$$b_t = \sum_{i,j=1}^{s} \nu_{ij}^{(t)} e_{r+i,r+j}.$$

Pelo Teorema 1.5.4, $\tilde{A} = F\{a_1, a_2, \ldots\}$ e $\tilde{B} = F\{b_1, b_2, \ldots\}$ são álgebras relativamente livres das variedades $\mathrm{var}(A)$ e $\mathrm{var}(B)$, respectivamente. Além disso, $\mathrm{Id}(\tilde{A}) = \mathrm{Id}(A)$ e $\mathrm{Id}(\tilde{B}) = \mathrm{Id}(B)$.

Definamos
$$u_t = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} \mu_{ij}^{(t)} e_{i,r+j}.$$

Agora provaremos que $u_1, u_2 \dots$ geram em $UT(d_1, \dots, d_m) \otimes F[T]$ um $(\tilde{A}, \tilde{B})$-módulo livre. De fato, sejam $f_1, f_2, \dots$ elementos linearmente independente em $\tilde{A}$, vamos verficar que

$$\sum_{ij} f_i u_j g_{ij} \neq 0$$

onde os g_{ij} são elementos não nulos de $\tilde{B}$. Dado que $u_1, u_2, \dots$ depende do conjunto disjunto U, só precisamos verificar a igualdade anterior para algum u_i. Suponhamos que

$$f_1 u_1 g_1 + \cdots + f_n u_1 g_n = 0 \tag{4.7}$$

para algum $n \geq 1$ e $g_1, \dots, g_n$ não nulos em $\tilde{B}$.

Dado que g_1 é um elemento não nulo em $\tilde{B}$, então $g_1 \notin \mathrm{Id}(B)$, logo g_1 tem um valor não zero em B para alguma especialização nas variáveis $\nu_{ij}^{(t)}$. Este valor é uma combinação linear das matrizes e_{ij}, $r+1 \leq i, j \leq r+s$ com algum coeficiente não nulo.

Denotemos por $\sum \lambda_{ij}^{(k)} e_{ij}$ o valor de g_k nesta especialização. Seja o coeficiente de $e_{i_0 j_0}$ não nulo, isto é, $\lambda_{i_0 j_0}^{(1)} \neq 0$.

Como o lado esquerdo de 4.7 é zero para qualquer especialização das variavies $\nu_{ij}^{(t)}$, temos que

$$\sum_{i,j=r+1}^{r+s} (\sum_k \lambda_{ij}^{(k)} f_k) u_1 e_{ij} = 0 \tag{4.8}$$

em $UT(d_1, \dots, d_m) \otimes F[P, U] \subseteq UT(d_1, \dots, d_m) \otimes F[T]$ e $\lambda_{i_0 j_0}^{(1)} \neq 0$.

Agora consideremos a especialização nas variáveis $\mu_{ij}^{(t)}$ tal que $u_1 \to e_{ri_0}$. De 4.8 segue que

$$\sum_j \sum_k \lambda_{i_0 j}^{(k)} f_k e_{rj} = 0. \tag{4.9}$$

Para j fixo temos que $f_k e_{rj}$ é uma matriz cujas primeira,..., $(j-1)$-ésima, $(j+1)$-ésima,..., $(r+s)$-ésima colunas são nulas. Portanto a igualdade 4.8 é válida para qualquer j, em particular para $j = j_0$, assim

$$(\sum_k \lambda_{i_0 j_0}^{(k)} f_k) e_{rj_0} = 0. \tag{4.10}$$

Observemos que o coeficiente de e_{rj_0} é uma combinação linear de elementos linearmente independentes $f_1, \dots, f_n \in \tilde{A}$ com $\lambda_{i_0 j_0}^{(1)} \neq 0$. Assim

$$f = \sum_k \lambda_{i_0 j_0}^{(k)} f_k$$

é um elemento não nulo em $\tilde{A}$, portanto f não é identidade de A. De 4.10 segue que para qualquer homomorfismo $\varphi : \tilde{A} \to A$ temos que $\varphi(f)e_{rj_0} = 0$. Isto significa que a matriz $\varphi(f)$ tem a r-ésima coluna nula. Pelo lema 4.2.2 o gerado linear $\langle \varphi(f) \rangle$ de todas as avaliações de f em A é um ideal de Lie em $A = UT(d_1, \ldots, d_{m-1})$.

Por outro lado, A não tem ideais de Lie cuja r-ésima coluna é nula. De fato, seja $C = (c_{ij}) \in A$ tal que as colunas $(k+1)$-ésima,..., r-ésima são nulas e $c_{ik} \neq 0$ para alguns i, k. Assim $[C, e_{kr}]$ tem um elemento não nulo na entrada (i, r), o qual é uma contradição. Logo a igualdade 4.7 é falsa, Portanto $u_1, u_2, \ldots$ geram um $(\tilde{A}, \tilde{B})$-módulo livre.

Assim pelo Corolário 1.7.10 temos que $F\{a_i + b_i + u_i | i = 1, 2, \ldots\}$ é a álgebra relativamente livre correspondente ao ideal $I = Id(M_{d_1}(F)) \cdots Id(M_{d_m}(F))$. □

Observação 4.2.5. Seja $p \geq 1$, então o lema anterior também é verdadeiro para a álgebra relativamente livre de posto p da variedade $\mathcal{V}$, $R_p(I)$.

Utilizando o lema anterior podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 4.2.6. *O T-ideal de $UT(d_1, \ldots, d_m)$ é igual ao produto de T-ideais de álgebras de matrizes, isto é,* $\mathrm{Id}(UT(d_1, \ldots, d_m)) = \mathrm{Id}(M_{d_1}(F)) \cdots \mathrm{Id}(M_{d_m}(F))$.

Demonstração. Utilizando um argumento completamente análogo ao utilizado no Lema 4.1.6, temos que

$$\mathrm{Id}(M_{d_1}(F)) \cdots \mathrm{Id}(M_{d_m}(F)) \subseteq \mathrm{Id}(UT(d_1, \ldots, d_m)).$$

Dado que F é infinito, pelo Lema 1.5.2 segue que $UT(d_1, \ldots, d_m) \otimes F[\{\xi_{ij}{}^{(t)} | i, j, t \geq 1\}]$ satisfaz a mesmas identidades que $UT(d_1, \ldots, d_m)$.

Pelo lema anterior existe $W \subseteq UT(d_1, \ldots, d_m) \otimes F[\{\xi_{ij}{}^{(t)} | i, j, t \geq 1\}]$ tal que

$$\mathrm{Id}(W) = \mathrm{Id}(M_{d_1}(F)) \cdots \mathrm{Id}(M_{d_m}(F)).$$

Além disso, $\mathrm{Id}(UT(d_1, \ldots, d_m) \otimes F[\{\xi_{ij}{}^{(t)} | i, j, t \geq 1\}]) \subseteq \mathrm{Id}(W)$. Portanto

$$\mathrm{Id}(UT(d_1, \ldots, d_m)) = \mathrm{Id}(M_{d_1}(F)) \cdots \mathrm{Id}(M_{d_m}(F)).$$

□

O próximo resultado nos dá uma caracterização dos T-ideais de uma variedade de posto básico finito. Para isto, primeiro falaremos de um teorema de Kemer que nos fornece uma caracterização dos T-ideais verbalmente primos. Além disso este teorema foi o alicerce da teoria estrutural de T-ideais em característica zero desenvolvida por Kemer.

Definição 4.2.7. Seja I um T-ideal de $F\langle X \rangle$. Se dados I_1, I_2 T-ideais tais que $I_1 I_2 \subseteq I$, temos que $I_1 \subseteq I$ ou $I_2 \subseteq I$, dizemos que I é um T-ideal verbalmente primo.

Lembremos que no capítulo 2 falamos da álgebra de Grassman, G, de um espaço vetorial de dimensão infinita, a qual é uma álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada. Agora consideremos p, q inteiros positivos onde $p \geq q$ e seja

$$M_{p,q}(G) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} | a \in M_p(G^{(0)}), b \in M_{p\times q}(G^{(1)}), c \in M_{p\times q}(G^{(1)}), d \in M_q(G^{(0)}) \right\}.$$

Note que $M_{p,q}(G)$ é subespaço vetorial de $M_{p+q}(G)$ e além disso é uma álgebra. A prova do seguinte resultado pode ser encotrada em [22].

Teorema 4.2.8 (Kemer)**.** *Um T-ideal I é verbalmente primo se, e somente se, I é algum destes* $\mathrm{Id}(M_k(F))$*,* $T(M_k(G))$*,* $T(M_{p,q})(G)$*,* (0) *ou* $F\langle X\rangle$*.*

O próximo resultado nos fornece uma caracterização de variedades minimais de posto básico finito que depende da estrutura de seus $T-$ideais.

Corolário 4.2.9. *Sejam $\mathcal{V}$ uma variedade de posto básico finito com* $\exp(\mathcal{V}) = d \geq 2$ *e I seu $T-$ideal correspondente. Logo $\mathcal{V}$ é uma variedade minimal de expoente d se, e soamente se, $I = I_1 \cdots I_m$ onde $I_1, \ldots, I_m$ são $T-$ideais verbalmente primos.*

Demonstração. Suponhamos que $\mathcal{V}$ é uma variedade minimal, logo pelo Teorema 4.1.9, $\mathcal{V} = \mathrm{var}(UT(d_1, \ldots, d_m))$. Assim, pelo Corolário anterior temos que

$$\mathrm{Id}(\mathcal{V}) = \mathrm{Id}(M_{d_1}(F)) \cdots \mathrm{Id}(M_{d_m}(F)).$$

Utilizando o Teorema 4.2.8, temos que $\mathrm{Id}(M_{d_i}(F))$ é verbalmente primo para $i = 1, \ldots, k$.

Agora suponhamos que $\mathcal{V}$ é uma variedade de posto básico finito tal que

$$\mathrm{Id}(\mathcal{V}) = I_1 \cdots I_m$$

onde $I_1, \ldots, I_m$ são $T-$ideais verbalmente primos. Como $\mathcal{V}$ é uma variedade de posto básico finito, temos que $I_i = \mathrm{Id}(M_{d_i}(F))$ para $1 \leq i \leq m$, assim

$$I = \mathrm{Id}(M_{d_1}(F)) \cdots \mathrm{Id}(M_{d_m}(F)).$$

Logo $I = \mathrm{Id}(UT(d_1, \ldots, d_m))$, segue que $\mathcal{V} = \mathrm{var}(UT(d_1, \ldots, d_m))$. Utilizando de novo o Teorema 4.1.9, concluímos que $\mathcal{V}$ é uma variedade minimal. □

4.3 Álgebras Relativamente Livres e Dimensão de Gelfand-Kirillov

No capítulo três falamos de dois inteiros positivos que são associados a uma PI-álgebra, estos são o PI-expoente e a dimensão de Gelfand-Kirillov. Nesta seção mostraremos uma relação entre a dimensão de Gelfand-Kirillov de uma álgebra relativamente livre da variedade $\mathcal{V}$ e a codimensão de crescimento de $\mathcal{V}$, para isto utilizaremos vários resultados estudados no capítulos três e nas seções anteriores do capítulo atual.

Lembremos que denotamos por $R_m(\mathcal{V})$ a álgebra relativamente livre de posto m da variedade $\mathcal{V}$.

Teorema 4.3.1. *Seja $\mathcal{V}$ uma variedade não nilpotente das álgebras associativas sobre um corpo de característica zero. Denotemos $R_m = R_m(\mathcal{V})$, então*

$$\text{GKdim}\, R_m \geq (m-1)\exp(R_m) + 1.$$

Se $\mathcal{V} = \text{var}(UT(d_1, \ldots, d_k))$ e $m \geq 2$, logo

$$\text{GKdim}\, R_m = (m-1)\exp(R_m) + k = (m-1)(d_1^2 + \cdots + d_k^2) + k.$$

Demonstração. Primeiro vamos provar o teorema para $A = UT(d_1, \ldots d_k)$, é conhecido que se $\mathcal{V} = \text{var}(M_d(F))$, então

$$\text{GKdim}\, R_m(\mathcal{V}) = (m-1)d^2 + 1$$

(ver [5]). Como $\exp(\mathcal{V}) = d^2$, temos que o teorema é verdadero para $k = 1$.

Seja $k > 1$, logo $\exp(A) = d_1^2 + \cdots + d_k^2$ e pelo Teorema 4.2.6

$$\text{Id}(A) = \text{Id}(M_{d_1}(F)) \cdots \text{Id}(M_{d_k}(F)).$$

Dado que A pode ser gerada por dois elementos temos que $\exp(A) = \exp(R_m)$ para $m \geq 2$. Denotemos $R_m^i = R_m(\text{var}(M_{d_i}(F))$, logo pelo Teorema 3.4.13 temos que

$$\begin{aligned}
\text{GKdim}\, R_m(\mathcal{V}) &= \text{GKdim}\, R_m^1 + \cdots + \text{GKdim}\, R_m^k \\
&= \sum_{i=1}^{k}((m-1)d_i^2 + 1) \\
&= (m-1)(d_1^2 + \cdots + d_k^2) + k
\end{aligned}$$

Agora consideremos $\mathcal{V}$ uma variedade arbitrária. Seja $R_m = R_m(\mathcal{V})$ e suponhamos que $\exp(R_m) = 1$. Pela Proposição 3.3.9 $\text{var}(R_m)$ é gerada por uma álgebra B de dimensão finita, utilizando o Teorema de Wedderburn-Malcev 1.1.23 temos que

$$B = M_{d_1}(F) \oplus \cdots \oplus M_{d_s}(F) + J(B),$$

Note que $M_{d_1}(F) \subseteq B$, logo pela Proposição 3.4.7

$$\text{GKdim}(R_m) \geq \text{GKdim}\, R_m(M_{d_1}(F)) = (m-1)d_1^2 + 1,$$

assim $\text{GKdim}(R_m) \geq m = (m-1)\exp(R_m) + 1$.

Se $\exp(R_m) \geq 2$, logo pelo Teorema 4.1.9 existe $UT(d_1, \ldots, d_k) \in \text{var}(R_m)$ tal que

$$d_1^2 + \ldots + d_k^2 = \exp(R_m).$$

Dado que $R_m(\mathrm{var}(UT(d_1, \ldots d_k))$ é imagem homomorfa de R_m, pela Proposição 3.4.7 segue que

$$\operatorname{GKdim} R_m \geq \operatorname{GKdim} R_m(\mathrm{var}(UT(d_1, \ldots d_k))$$

e daí $\operatorname{GKdim} R_m \geq (m-1)(d_1^2 + \cdots + d_k^2) + k \geq (m-1)(d_1^2 + \cdots + d_k^2) + 1$. $\square$

Referências

[1] E. Aljadeff and A. Giambruno. Multialternating graded polynomial and growth of polynomial identities. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 141(9):3055–3065, 2013.

[2] E. Aljadeff, A. Giambruno, and D. La Mattina. Graded polynomial identities and exponential growth. *J. Reine Angew. Math.*, 650:83–100, 2011.

[3] S. Amitsur and J. Levitzki. Minimal identidade for algebras. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1:449–463, 1950.

[4] F. Benanti, A. Giambruno, and M. Pipitone. Polynomial identities on superalgebras and exponential growth. *J. Algebra*, 269:422–438, 2003.

[5] A. Berele. Generic verbally prime PI-algebra and their GK-dimension. *Comm. Algebra*, 21:1487–1504, 1993.

[6] A. Berele and A. Regev. Codimensions of product and of intersections of verbally prime t-ideals. *Israel J. Math.*, 103:17–28, 1998.

[7] M. Dehn. Über die grundlagen der projektiven geometric und allgemeine zahlsysteme. *Math. Ann.*, 85:184–194, 1922.

[8] V. Drensky. Gelfand-kirillov dimension of PI-algebras. *Lect. Notes Pure Appl. Math.*, 198:97–113, 1998.

[9] V. Drensky. *Free Algebras and PI-algebras.* Springer, 2000.

[10] Y. Drozd and V. Kirichenko. *Finite dimensional algebras.* Springer, 1994.

[11] A. Giambruno. Amitsur's conjecture for polynomial H-identities of H-module lie algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 367(1):313–354, 2015.

[12] A. Giambruno and D. La Mattina. Graded polynomial identities and codimensions: computing the exponential growth. *Adv. Math.*, 225:859–881, 2010.

[13] A. Giambruno and M. Zaicev. On codimension growth of finitely gerated associative algebras. *Adv. Math.*, 140:145–155, 1998.

[14] A. Giambruno and M. Zaicev. Exponential codimension growth of PI-algebra: an exact estimate. *Adv. Math.*, 142:221–243, 1999.

[15] A. Giambruno and M. Zaicev. Minimal varieties of algebras of exponetial growth. *Adv. Math.*, 144:310–323, 2003.

[16] A. Giambruno and M. Zaicev. *Polynomial Identities and Asymptotic Method*. Math. Surveys Monogr., 2005.

[17] A. Gordienko, G. Janssens, and E.Jespers. Semigroup graded algebras and graded PI-expoent. *Israel J. Math.*, 220(1):387–452, 2017.

[18] I. Herstein. *Noncommutative Rings*. Math. Assoc. America, 1968.

[19] G. James and A. Kerber. *The Representation theory of the symmetric groups*. Addison-Wesley Publishing Company, 1981.

[20] I. Kaplansky. Rings with a polynomial identity. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 45:575–580, 1948.

[21] Y. Karasik. Kemer's theory for H-module algebras with aplication to the PI-expoent. *J. Algebra*, 457(1):194–227, 2016.

[22] A. Kemer. Varieties and $\mathbb{Z}_2$-graded algebras. *Math. USSR*, 25:359–374, 1985.

[23] A. Kemer. *Ideal of Identities of Associative Algebras*, volume 87. Transl. Math. Monogr., 1988.

[24] G. R. Krause and T. H.Lenagan. *Growth of Algebras and Gelfand-Kirillov Dimension*. Amer. Math Soc, 2000.

[25] J. Lewin. A matriz representation for associative algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 188:293–308, 1974.

[26] J. Malcev. A basis for the identities of block-triangular matrices. *Algebra i Logika*, 10:393–400, 1971.

[27] J. Rotman. *An Introduction to Homological Algebra*. Academic Press, 1979.

[28] B. Sagan. *The Symmetric Group: Representations, Combinatorial Algorithms and Symetrics functions*. Graduate Texts in Mathematics, 203, Springer-Verlag, 2001.

[29] W. Wagner. Über die grundlagen der projektiven geometric und allgemeine zahlsysteme. *Math. Ann.*, 113:528–567, 1937.